ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2010, том 46, № 4, с. 91–100

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ДУОПОЛИЯ ХОТЕЛЛИНГА И ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ НА ПЛОСКОСТИ*

© 2010 г. В.В. Мазалов, А.В. Щипцова, Ю.С. Токарева

(Петрозаводск, Чита)

Исследуется дуополия Хотеллинга на плоскости. На плоскости расположены две фирмы, которые объявляют цены на товар, а покупатели делают выбор фирмы, сравнивая затраты на ее посещение. Затраты вычисляются в виде суммы цены и расстояния от покупателя до фирмы. Находится равновесие по Нэшу для моделей, в которых расстояние вычисляется в евклидовой и манхэттенской манере. Решается задача о размещении, в которой нужно определить оптимальное расположение фирм.

Ключевые слова: дуополия Хотеллинга на плоскости, равновесные цены, задача о размещении.

ВВЕДЕНИЕ

Дуополия Хотеллинга (Hotelling, 1929) является естественным продолжением классических в математической экономике моделей Курно (1838 г.) и Бертрана (1883 г.) о равновесных ценах, в которой принимается в рассмотрение расстояние от покупателя до фирмы. Х. Хотеллинг нашел равновесие на линейном рынке и поставил задачу о размещении фирм, но, к сожалению, равновесие для такой постановки задачи не получилось. В этом случае для фирм оказалось оптимально располагаться как можно ближе друг к другу, чтобы привлечь покупателей.

Впоследствии задача о размещении, поставленная Х. Хотеллингом, анализировалась в линейном варианте в работах (d'Aspremont et al., 1979; Kats, 1987; Bester et al., 1996; Zhang, Teraoka, 1998; Sakaguchi, 2001). Модель "линейного" города Хотеллинга была распространена на модель "кругового" города (Salop, 1979), где фирмы располагаются вдоль окружности на одинаковом расстоянии друг от друга, а затем в работе (Ahn et al., 2004), где фирмы могут входить в рынок последовательно, одна за другой.

В (Dresner, 1982; Hakimi, 1983) проблема размещения рассматривалась как проблема равновесия по Штакельбергу на плоскости и на графе, соответственно. В работе (Mazalov, Sakaguchi, 2003) было показано, что на плоском рынке ситуация другая и равновесие в задаче о размещении существует. При этом затраты покупателя рассматривались равными сумме цены на продукт и квадратичных транспортных расходов.

В данной работе мы находим равновесие в дуополии Хотеллинга на плоскости и в задаче о размещении для критерия предпочтения фирм в виде суммы цены и расстояния, причем расстояние рассматриваем в евклидовой и манхэттенской манере. Расстояние по Манхэттену возникает в задачах, когда для передвижения по городу используются улицы. При рассмотрении рынка телекоммуникационных услуг расстояние по Манхэттену применимо для моделей предоставления информационных услуг с помощью оптоволоконного канала, а расстояние по Евклиду – для моделирования услуг с помощью радиоканала.

1. ДУОПОЛИЯ ХОТЕЛЛИНГА НА ПЛОСКОСТИ

Представим город в виде единичного круга S с равномерным распределением покупателей по его площади (рис. 1). Предположим, что две фирмы (I и II) располагаются на диаметре симметрично относительно начала координат в точках $(-k, 0)$ и $(k, 0)$. Каждая фирма объявляет цену на

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00089-а), Отделения математических наук РАН и проекта АВЦП "Развитие потенциала высшей школы".

свой товар c_i, i =1, 2. Без ограничения общности будем считать, что $c_1 \le c_2$.

Покупатель из точки $(x, y) \in S$ сравнивает затраты от посещения каждой фирмы. Расстояние до каждой фирмы обозначим через $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x+k)^2+y^2}$ и $\rho_2(x, y) = \sqrt{(x-k)^2+y^2}$, соответственно. Предположим, что затраты складываются из цены на товар плюс транспортные расходы, т.е. $L_i(x, y) = c_i + \rho_i(x, y)$, i =1, 2. Тогда множество всех покупателей разобьется на два подмножества S_1 и S_2 с границей, определяемой уравнением

$$c_1 + \sqrt{(x+k)^2+y^2} = c_2 + \sqrt{(x-k)^2+y^2},$$

или, после упрощений $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, где

$$a = 0.5(c_2 - c_1),\ \ b = \sqrt{k^2 - a^2}. \tag{1}$$

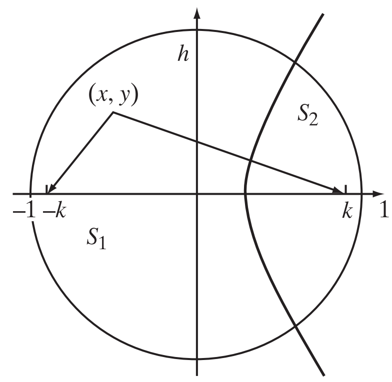

Рис. 1. Дуополия на плоскости, $h = b\sqrt{1-a^2}/k$

Таким образом, граница между областями S_1 и S_2 имеет форму гиперболы.

Выигрыши игроков вычисляются по формулам $H_1(c_1, c_2) = c_1 s_1$, $H_2(c_1, c_2) = c_2 s_2$, где s_1 и s_2 – площади соответствующих областей. Поскольку $s_1 + s_2 = \pi$, то достаточно найти s_2. Из зависимостей, отображенных на рис. 1, получаем

$$s_2 = 0.5\pi - 2\left[a\int_0^{b\sqrt{1-a^2}/k}\sqrt{1+(y^2/b^2)}\,dy + \int_{b\sqrt{1-a^2}/k}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\right] =$$

$$= 0.5\pi - 2\left[ab\int_0 \sqrt{1+y^2}\,dy + \int_{b\sqrt{1-a^2}/k}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\right], \tag{2}$$

а равновесие по Нэшу (c_1^*, c_2^*) в этой игре удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial H_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \pi - s_2 - c_1\frac{\partial s_2}{\partial c_1} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial H_2(c_1, c_2)}{\partial c_2} = s_2 + c_2\frac{\partial s_2}{\partial c_2} = 0. \tag{4}$$

Из представления (2) для s_2 запишем

$$\frac{\partial s_2}{\partial c_1} = \frac{b^2 - a^2}{b}\int_0^{\sqrt{1-a^2}/k}\sqrt{1+y^2}\,dy + \frac{a^2\sqrt{1-a^2}\sqrt{1+b^2}}{bk^2}. \tag{5}$$

Так как $\partial a/\partial c_1 = -\partial a/\partial c_2$, то

$$\frac{\partial s_2}{\partial c_2} = -\frac{\partial s_2}{\partial c_1}. \tag{6}$$

Функция $s_2(c_1, c_2)$ монотонно возрастает по c_1, что следует из соображения, что если первый игрок увеличивает цену на товар, то покупателю из S_2, для которого затраты на посещение фирмы I были больше, чем фирмы II, будет по-прежнему выгоднее посещение фирмы II.

Теперь перейдем к нахождению равновесия в этой игре. Учитывая (6), из (3), (4) вытекает соотношение $s_2(1 + c_1/c_2) = \pi$. Откуда следует, что если $c_1 < c_2$, то s_2 должно быть больше $\pi/2$, но это противоречит тому факту, что если цена, объявленная фирмой I, меньше, чем у соперника, то множество покупателей, которые предпочтут эту фирму S_1, будет больше, чем S_2, т.е. $s_2 < \pi/2$. Отсюда вытекает, что если решение системы (3), (4) существует, то это может быть лишь при $c_1 = c_2$. Это, собственно говоря, следует и из симметрии задачи.

Итак, будем искать решение среди равных цен, т.е. при условии $c_1 = c_2$. Тогда $s_1 = s_2 = \pi/2$, и согласно обозначениям $a = 0$, $b = k$, из (5) получаем

$$\frac{\partial s_2}{\partial c_1} = k\int_0^{1/k} \sqrt{1+y^2}\,dy = 0.5\left[\sqrt{1+1/k^2} + k\ln\left(1/k+\sqrt{1+1/k^2}\right)\right].$$

Несложно проверить вогнутость функций $H_1(c_1, c_2)$ и $H_2(c_1, c_2)$ в окрестности равных цен по c_1 и c_2, соответственно. Из (3), (4) следует, что равновесные цены имеют вид

$$c_1^* = c_2^* = \pi/\left(\sqrt{1+1/k^2} + k\ln\left(1/k+\sqrt{1+1/k^2}\right)\right). \tag{7}$$

Заметим, что если фирмы расположены на концах диаметра, то из (7) вытекает, что равновесные цены равны:

$$c_1^* = c_2^* = \pi/\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 1.3685.$$

При этом оптимальные выигрыши игроков составят $H_1^* = H_2^* = \pi^2/2(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})) \approx 2.1497$.

2. ДУОПОЛИЯ ХОТЕЛЛИНГА НА ПЛОСКОСТИ С РАССТОЯНИЕМ ПО МАНХЭТТЕНУ

Представим город в виде единичного круга S с равномерным распределением покупателей по его площади. Две фирмы I и II находятся в точках $(u, 0)$ и $(v, 0)$ соответственно, и каждая объявляет цену на свой товар c_i, $i = 1, 2$. Покупатель из точки $(x, y) \in S$ сравнивает затраты от посещения каждой фирмы. Пусть, как это было в ситуации, отображенной на рис. 1, покупатель расположен в верхней полуплоскости, т.е. $y \geq 0$. Предположим, что расстояние от покупателя до фирмы II как и раньше измеряется в евклидовой метрике $\rho_2(x, y) = \sqrt{(x-v)^2 + y^2}$, а расстояние до фирмы I – это расстояние Манхэттена (т.е. движение возможно только параллельно осям Ox и Oy), $\rho_1(x, y) = y + (x - u)$.

В качестве примера можно взять две фирмы, предоставляющие услуги связи, одна из которых использует оптоволоконные линии, а другая – радиоканал. Как и раньше, затраты складываются из цены на товар плюс транспортные расходы, т.е. $L_i(x, y) = c_i + \rho_i(x, y)$, $i = 1, 2$. Тогда множество покупателей разобьется на два подмножества S_1 и S_2 с границей, определяемой уравнением

$$c_1 + y + (x - u) = c_2 + \sqrt{(x-v)^2 + y^2},$$

или после упрощений

$$x = (2y(v - z) + z(2v - z))/[2(y + z)], \tag{8}$$

где $z = v - u + c_1 - c_2$.

Таким образом, граница между областями S_1 и S_2 (рис. 2) определяется двумя симметричными гиперболами в верхней и нижней полуплоскости. Заметим, что существуют две возможности пересечения гиперболой единичной окружности – в левой (рис. 2*а*) и правой (рис. 2*б*) полуплоскости.

Рассмотрим подробно первый случай, второй исследуется аналогично. Выигрыши игроков имеют вид $H_1(c_1, c_2) = c_1 s_1$, $H_2(c_1, c_2) = c_2 s_2 = c_2(\pi - s_1)$, где s_i – площади соответствующих областей, $i = 1, 2$. Равновесные цены (c_1^*, c_2^*) можно найти из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial c_1} &= s_1 + c_1\frac{\partial s_1}{\partial c_1} = 0, \\ \frac{\partial H_2}{\partial c_2} &= \pi - s_1 - c_2\frac{\partial s_1}{\partial c_2} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

Определим s_1 и $\partial s_1/\partial z$. Обозначим через h ординату точки пересечения гиперболы (8) и единичной окружности (см. рис. 2*а*). Тогда h удовлетворяет уравнению

$$2h(v - z) + z(2v - z) = -2(h + z)\sqrt{1 - h^2}. \tag{10}$$

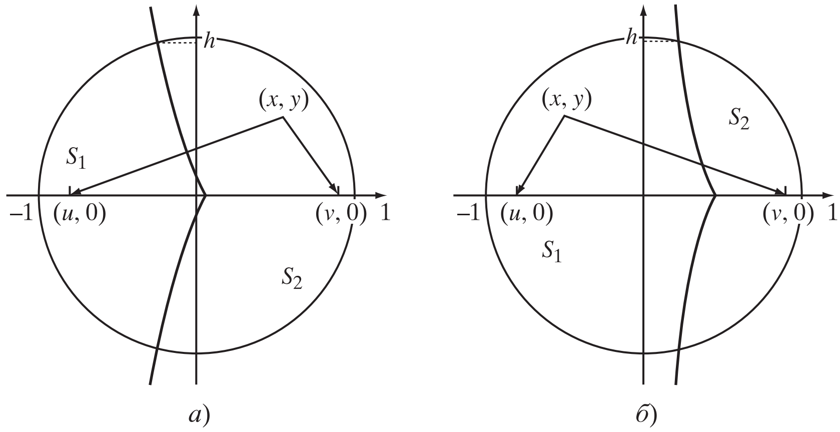

Рис. 2. Дуополия на плоскости с расстоянием по Манхэттену (*a, b*): пересечения гиперболой единичной окружности в левой (*а*) и правой (*б*) полуплоскости

Площадь s_1 вычисляется по формуле

$$s_1 = 2\int_0^h \left([2y(v-z)+z(2v-z)]/[2(y+z)]+\sqrt{1-y^2}\right)dy. \tag{11}$$

Отсюда

$$\frac{\partial s_1}{\partial z} = 2\left([2h(v-z)+z(2v-z)]/[2(h+z)]+\sqrt{1-h^2}\right)\frac{\partial h}{\partial z}+$$
$$+2\int_0^h \left([2y(v-z)+z(2v-z)]/[2(y+z)]\right)'_z dy.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу (10), поэтому

$$\frac{\partial s_1}{\partial z} = -2h + z\int_0^h (2y+z)/(y+z)^2\, dy. \tag{12}$$

Так как s_1 зависит от z и $\partial z/\partial c_1 = -\,\partial z/\partial c_2$, то $\partial s/\partial c_2 = -\,\partial s_1/\partial c_1$. Тогда систему для нахождения равновесия (9) можно представить в виде

$$\begin{gathered} s_1 + c_1\frac{\partial s_1}{\partial c_1} = 0, \\ \pi - s_1 + c_2\frac{\partial s_1}{\partial c_1} = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Следовательно, в равновесии площадь s_1 первого игрока должна быть равна

$$s_1 = \pi c_1/(c_1+c_2). \tag{14}$$

Заметим, что $\partial s_1/\partial c_1 = -\,\partial s_1/\partial z$, тогда вместе с (13) это дает $\partial s_1/\partial z = \partial s_1/\partial c_1 = -s_1/c_1$ и $\partial s_1/\partial z = -\pi/(c_1+c_2)$.

Итак, мы приходим к следующей системе уравнений, определяющей равновесие в данной задаче:

$$2h - z\int_0^h \frac{2y+z}{(y+z)^2}dy = \frac{\pi}{c_1+c_2},$$

$$2(v-z)h + 2\int_0^h \left(\frac{z^2}{2(y+z)}+\sqrt{1-y^2}\right)dy = \pi\frac{c_1}{c_1+c_2},$$

Равновесные цены и выигрыши

u	v	c_1	c_2	H_1	H_2
–1	1	1.402	1.644	2.027	2.787
–1	0.5	1.192	1.712	1.537	3.172
–0.5	1	1.535	1.442	2.487	2.194
–0.5	0.5	1.298	1.479	1.906	2.474

где h определяется условием (10). Вычисляя интегралы, получаем систему уравнений

$$2h(v-z)+h\sqrt{1-h^2}+z^2\log(1+h/z)+\arcsin h=\pi c_1/(c_1+c_2),$$
$$2h+zh/(z+h)-2z\log(1+h/z)=\pi/(c_1+c_2). \tag{15}$$

Например, если фирмы располагаются на противоположных концах диаметра, т.е. $u=-1$, $v=1$, из (15) находим, что $c_1^*\approx 1.402$, $c_2^*\approx 1.644$. При этом оптимальные выигрыши равны $H_1\approx 2.027$, $H_2\approx 2.787$. Мы видим, что по сравнению с вариантом, рассмотренным в разд. 2, в состоянии равновесия цены стали выше у обоих игроков, в то время как выигрыш у первого игрока уменьшился, а у второго значительно увеличился.

Второй возможный случай, соответствующий рис. 2*б*, исследуется аналогично. В этом случае ордината h точки пересечения гиперболы (8) и единичной окружности удовлетворяет уравнению $2h(v-z)+z(2v-z)=2(h+z)\sqrt{1-h^2}$. Площадь s_2 равна

$$s_2=2\int_0^h\left(-\left(2y(v-z)+z(2v-z)\right)/\left[2(y+z)\right]+\sqrt{1-y^2}\right)dy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial s_2}{\partial z}=2h-z\int_0^h\frac{2y+z}{(y+z)^2}\,dy.$$

Теперь в системе уравнений (9), которая определяет состояние равновесия, поменяем ролями s_1 и s_2. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, приводят к системе уравнений, позволяющей найти равновесие в данной задаче:

$$2h-z\int_0^h(2y+z)/(y+z)^2\,dy=\pi/(c_1+c_2),$$
$$-2(v-z)h+2\int_0^h\left(-z^2/[2(y+z)]+\sqrt{1-y^2}\right)dy=\pi c_2/(c_1+c_2),$$

или

$$2h+zh/(z+h)-2z\log(1+h/z)=\pi/(c_1+c_2),$$
$$-2h(v-z)+h\sqrt{1-h^2}-z^2\log(1+h/z)+\arcsin h=\pi c_2/(c_1+c_2).$$

В таблице приведены значения равновесных цен, вычисленные для различных положений фирм на диаметре.

3. ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Ранее было показано, что в случае рационального поведения покупателей существуют равновесные цены, которые зависят от расположения фирм в городе. Естественно, возникает вопрос, а существует ли равновесное расположение фирм. В рамках данной статьи ограничимся рассмотрением лишь первой модели с евклидовой метрикой.

Из соображений симметрии следует, что достаточно исследовать случай, когда фирмы располагаются на диаметре круга. Пусть первая фирма находится в точке $(k_1, 0)$, а вторая – в точке $(k_2, 0)$, где $k_1 \le 0 \le k_2$. Предположим также, что $c_1 \le c_2$. Исследование противоположного случая проводится аналогично.

Множество покупателей разобьется на два подмножества S_1 и S_2 с границей, определяемой уравнением

$$c_1 + \sqrt{(x-k_1)^2 + y^2} = c_2 + \sqrt{(x-k_2)^2 + y^2},$$

или после упрощений $(x - \bar{k})^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, где

$$a = 0.5(c_2 - c_1),\ b = \sqrt{k_0^2 - a^2},\ k_0 = 0.5(k_2 - k_1),\ \bar{k} = 0.5(k_1 + k_2). \tag{16}$$

Таким образом, граница между областями S_1 и S_2 снова является гиперболой. Выигрыши игроков имеют вид $H_1(c_1, c_2) = c_1 s_1$, $H_2(c_1, c_2) = c_2 s_2$, где s_i – площади соответствующих областей, $i = 1, 2$.

Будем менять положение k_1 и k_2 этих фирм, каждый раз находя равновесные цены c_1, c_2. Они будут удовлетворять условиям

$$\frac{\partial H_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = s_1 + c_1 \frac{\partial s_1}{\partial c_1} = 0,\ \frac{\partial H_2(c_1, c_2)}{\partial c_2} = s_2 + c_2 \frac{\partial s_2}{\partial c_2} = 0.$$

Из того, что $\partial a/\partial c_1 = -\partial a/\partial c_2$, следует, что $\partial s_1/\partial c_1 = -\partial s_1/\partial c_2$ и $\partial s_1/\partial c_1 = -\partial s_2/\partial c_2$. Тогда систему для поиска равновесия в ценах можно представить в виде

$$\frac{\partial H_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \pi - s_2 + c_1 \frac{\partial s_2}{\partial c_2} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial H_2(c_1, c_2)}{\partial c_2} = s_2 + c_2 \frac{\partial s_2}{\partial c_2} = 0. \tag{18}$$

Равновесие (c_1, c_2), определяемое условиями (17), (18), зависит от положения фирм k_i, $i = 1, 2$. Таким образом, функции выигрыша игроков в равновесии также будут зависеть от k_1 и k_2. Запишем это в виде $H_i(k_1, k_2) = H_i(c_1(k_1, k_2), c_2(k_1, k_2))$, $i = 1, 2$.

Перейдем к нахождению равновесного положения фирм на плоскости, а именно координат (k_1^*, k_2^*), для которых выполняются условия

$$H_1(k_1, k_2^*) \le H_1(k_1^*, k_2^*),\ H_2(k_1^*, k_2) \le H_2(k_1^*, k_2^*)\ \forall k_1, k_2.$$

Симметрия задачи позволяет упростить построение равновесия. Поступим следующим образом. Зафиксируем положение k_1 первой фирмы и станем менять положение второй, каждый раз определяя равновесные цены c_1, c_2, которые будут зависеть от k_2. Тогда выигрыш фирмы II также будет функцией от k_2:

$$H_2(k_2) = H_2(c_1(k_2),\ c_2(k_2), k_2).$$

Найдем максимальный выигрыш фирмы II. Если он будет достигаться в точке k_2, симметричной относительно начала координат от точки k_1, т.е. $k_2 = -k_1 = k$, этого будет достаточно для того, чтобы ситуация $(-k, k)$ была равновесием по Нэшу в задаче о размещении. Эти соображения позволяют построить равновесие в задаче о размещении. Перейдем к нужным построениям.

Функция $H_2(k_2)$ в данном случае имеет вид $H_2 = c_2 s_2$, где s_2 (см. рис. 1) может быть представлена как

$$s_2 = 2\int_0^{y_0} \left(\sqrt{1 - y^2} - \bar{k} - a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}\right) dy, \tag{19}$$

где y_0 есть точка пересечения границы областей s_1 и s_2 и окружности, т.е. определяется из системы

$$(x-\bar{k})^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 = 1,$$

или из уравнения

$$(\sqrt{1-y^2} - \bar{k})^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$$

Заметим, что если игроки расположены симметрично, т.е. $k_2 = -k_1$, то при близких ценах $c_1 \to c_2$, $y_0 \to 1$. Максимум функции достигается в точке, для которой выполняется условие $dH_2/dk_2 = 0$, или

$$\frac{dH_2}{dk_2} = \frac{\partial c_2}{\partial k_2} s_2 + c_2 \left(\frac{\partial s_2}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial k_2} + \frac{\partial s_2}{\partial c_2}\frac{\partial c_2}{\partial k_2} + \frac{\partial s_2}{\partial k_2} \right) =$$
$$= \frac{\partial c_2}{\partial k_2}\left(s_2 + c_2 \frac{\partial s_2}{\partial c_2} \right) + c_2 \left(\frac{\partial s_2}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial k_2} + \frac{\partial s_2}{\partial k_2} \right) = 0. \qquad (21)$$

Из условия (18) для равновесия цен первая скобка в (21) равна нулю. Мы уже отмечали выше, что $\partial s_2/\partial c_2 = -\,\partial s_2/\partial c_1$, поэтому условие максимума в точке k_2 теперь принимает вид

$$-\frac{\partial s_2}{\partial c_2}\frac{\partial c_1}{\partial k_2} + \frac{\partial s_2}{\partial k_2} = 0. \qquad (22)$$

Чтобы найти $\partial c_1/\partial k_2$, продифференцируем уравнения (17), (18), которые определяют равновесные цены по k_2. Выражаем

$$\frac{\partial c_1}{\partial k_2} = \left[\left(\frac{\partial s_2}{\partial k_2} - c_1 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2 \partial k_2} \right)\left(2\frac{\partial s_2}{\partial c_2} + c_2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2^2} \right) - \left(\frac{\partial s_2}{\partial k_2} + c_2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2 \partial k_2} \right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial c_2} - c_1 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2^2} \right) \right] :$$

$$: \left[\left(2\frac{\partial s_2}{\partial c_2} - c_1 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2^2} \right)\left(2\frac{\partial s_2}{\partial c_2} + c_2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2^2} \right) - \left(\frac{\partial s_2}{\partial c_2} - c_1 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2^2} \right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial c_2} + c_2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2^2} \right) \right]. \qquad (23)$$

Согласно симметрии задачи равновесие должно достигаться в точках, симметричных относительно начала координат при равных ценах. Нетрудно показать, что при $c_1 \to c_2$ и $k_1 \to -k_2$ вторые производные $\partial^2 s_1/\partial c_1^2$ и $\partial^2 s_1/\partial c_2^2$ становятся бесконечно малыми. Тогда из (23) получаем представление

$$\frac{\partial c_1}{\partial k_2} = \left(\frac{\partial s_2}{\partial k_2} - 3c_2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2 \partial k_2} \right) \Big/ \left(3\frac{\partial s_2}{\partial c_2} \right), \qquad (24)$$

а из (19) –

$$\frac{\partial s_2}{\partial k_2} = 2\left(\sqrt{1-y_0^2} - \bar{k} - a\sqrt{1+y_0^2/b^2} \right)\frac{\partial y_0}{\partial k_2} - \int_0^{y_0} \left(1 + 2a \frac{\partial \sqrt{1+y^2/b^2}}{\partial k_2} \right) dy. \qquad (25)$$

Дифференцируя уравнение (20) по k_2, находим

$$\frac{\partial y_0}{\partial k_2} = \left(k_0 y_0^2 a^2 - b^4 \left(\sqrt{1-y_0^2} - \bar{k} \right) \right)\sqrt{1-y_0^2} \Big/ \left[b^2 \left(2y_0 b^2 \left(\sqrt{1-y_0^2} - \bar{k} \right) + 2y_0 a^2 \sqrt{1-y_0^2} \right) \right]. \qquad (26)$$

При $c_2 \to c_1$ и $k_2 \to -k_1 = k$ имеет место $a \to 0$, $b \to k$ и $y_0 \to 1$. Тогда из (26) следует, что $\partial y_0/\partial k_2 = o(\sqrt{1-y_0^2}) \to 0$. Таким образом, в равновесии должно выполняться

$$\frac{\partial s_2}{\partial k_2} = \int_0^{y_0} (-1)\,dy = -1.$$

Вычислим теперь в равновесии $\dfrac{\partial^2 s_2}{\partial c_2 \partial k_2}$. Из вида s_2 получаем, что это функция от аргументов (a, b, k_2), поэтому

$$\frac{\partial s_2}{\partial c_2} = \frac{\partial s_2}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial c_2} + \frac{\partial s_2}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial c_2} = \frac{\partial s_2}{\partial a}\frac{1}{2} - \frac{\partial s_2}{\partial b}\frac{a}{2b}$$

и

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2 \partial k_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 s_2}{\partial a^2}\frac{\partial a}{\partial k_2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial a \partial b}\frac{\partial b}{\partial k_2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial a \partial k_2}\right) - a\frac{\partial\left(\frac{1}{2b}\frac{\partial s_2}{\partial b}\right)}{\partial k_2}.$$

Поскольку в равновесии $a = 0$ и, кроме того, $\dfrac{\partial a}{\partial k_2} = 0$ и $\dfrac{\partial b}{\partial k_2} = \dfrac{k_0}{2b} = \dfrac{1}{2}$, то

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2 \partial k_2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 s_2}{\partial a \partial b} + 2\frac{\partial^2 s_2}{\partial a \partial k_2}\right). \tag{27}$$

Остается вычислить вторые производные в (27). Поскольку из (19)

$$\frac{\partial s_2}{\partial a} = 2\left(\sqrt{1-y_0^2} - \bar{k} - a\sqrt{1+y_0^2/b^2}\right)\frac{\partial y_0}{\partial a} - 2\int_0^{y_0} \sqrt{1+y^2/b^2}\,dy, \tag{28}$$

то

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial a \partial b} = 2\left(\frac{-y_0}{\sqrt{1-y_0^2}}\frac{\partial y_0}{\partial b} - a\frac{\partial\sqrt{1+y_0^2/b^2}}{\partial b}\right)\frac{\partial y_0}{\partial a} + 2\left(\sqrt{1-y_0^2} - \bar{k} - a\sqrt{1+y_0^2/b^2}\right)\frac{\partial^2 y_0}{\partial a \partial b} -$$

$$- 2\sqrt{1+y_0^2/b^2}\,\frac{\partial y_0}{\partial b} + \frac{2}{b^2}\int_0^{y_0} \frac{y^2}{\sqrt{b^2+y^2}}\,dy. \tag{29}$$

Нетрудно показать, что при $c_2 \to c_1$ и $k_2 \to -k_1$ производные $\dfrac{\partial y_0}{\partial a}, \dfrac{\partial y_0}{\partial b}$ и $\dfrac{\partial^2 y_0}{\partial a \partial b}$ становятся бесконечно малыми. Тогда из (29) вытекает, что в равновесии

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial a \partial b} = \frac{2}{k^2}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{k^2+y^2}}\,dy. \tag{30}$$

Дифференцируя (28) по k_2, находим, что в равновесии $\dfrac{\partial^2 s_2}{\partial a \partial k_2} = 0$. Подставив (30) в (27), имеем

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2 \partial k_2} = \frac{1}{2k^2}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{k^2+y^2}}\,dy,$$

а из (24) –

$$\frac{\partial s_2}{\partial c_2}\frac{\partial c_1}{\partial k_2}=\frac{1}{3}\frac{\partial s_2}{\partial k_2}-c_2\frac{\partial^2 s_2}{\partial c_2\partial k_2}=-\frac{1}{3}-\frac{c_2}{2k^2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{k^2+y^2}}dy.$$

Таким образом, условие (22) оптимальности стратегии $k_2 = k$ фирмы II с учетом симметричности теперь запишется в виде

$$\frac{1}{3}+\frac{c_2^*}{2k^2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{k^2+y^2}}dy-1=0,$$

или

$$c_1^*=c_2^*=\frac{4k^2}{3}\left(\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{k^2+y^2}}dy\right)^{-1}=\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{k^2}+\ln\frac{k}{1+\sqrt{1+k^2}}\right)^{-1}. \quad (31)$$

Из системы условий (31) и (7) для равновесных цен получаем условие для равновесного расположения фирм I и II:

$$\frac{8k}{3}\left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{k^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}\right)=\pi\left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{k^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}\right). \quad (32)$$

Решение уравнения (32) дает равновесие для размещения фирм ($-k^*$, k^*), из условия (31) находим равновесные цены (c_1^*, c_2^*) и, наконец, оптимальные выигрыши (H_1^*, H_2^*): $k^* \approx 0.552$, $c_1^* = c_2^* \approx 1.115$, $H_1^* = H_2^* \approx 1.751$.

Итак, получено равновесие по Нэшу в дуополии Хотеллинга на плоскости, когда город представлен в виде круга и жители равномерно в нем распределены. Равновесие найдено в случае, когда расстояние представлено в евклидовой метрике и метрике Манхеттена. Для первой модели симметрия задачи позволяет найти равновесие в задаче о размещении фирм в городе. Вторая модель может быть использована для моделирования рынка предоставления телекоммуникационных услуг. Мы увидели, что фирма, для которой расстояние выражается в евклидовой манере, имеет заметное преимущество перед фирмой, для которой расстояние представлено манхэттенской метрикой. Для второй модели равновесие в задаче о размещении построить не удается. Моделирование показывает, что для первой фирмы выгоднее быть дальше от второй фирмы, в то время как для второй фирмы ситуация противоположная, для нее выгоднее быть недалеко от первой фирмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ahn H.K., Cheng S.W., Cheong O., Golin M., van Oostrum R. (2004): Competitive Facility Location: the Voronoi Game // *Theoretical Computer Science*. Vol. 310.

Bester H., De Palma A., Leininger W., Thomas J., Von Tadden E.-L. (1996): A Non-Cooperative Analysis of Hotelling's Location Game // *Games and Econ. Behavior*. Vol. 12.

d'Aspremont C., Gabszewicz J., **Thisse J.-F.** (1979): On Hotelling's Stability in Competition // *Econometrica*. Vol. 47.

Dresner Z. (1982): Competitive Location Strategies for Two Facilities // *Regional Science and Urban Econ.* Vol. 12.

Hakimi S.L. (1983): On Locating New Facilities in a Competitive Environment // *European Journal of Operational Res.* Vol. 12.

Hotelling H. (1929): Stability in Competition // *Economic Journal*. Vol. 39.

Kats A. (1987): Location-Price Equilibria in a Spatial Model of Discriminatory Pricing // *Economic Letters*. Vol. 25.

Mazalov V., Sakaguchi M. (2003): Location Game on the Plane // *International Game Theory Rev.* Vol. 5. № 1.

Sakaguchi M. (2001): Pure Strategy Equilibrium in a Location Game with Discriminatory Pricing // *Game Theory and Applications*. Vol. 6.

Salop S. (1979): Monopolitic Competition with Outside Goods // *Bell Journal of Econ.* Vol. 10.

Zhang Y., Teraoka Y. (1998): A Location Game of Spatial Competition // *Math. Japonica*. Vol. 48.

Поступила в редакцию
19.02.2009 г.

Hotelling's Duopoly and Problem of Location on the Plane

V.V. Mazalov, A.V. Schiptsova, Yu.S. Tokareva

Authors consider the Hotelling's duopoly on the plane. There are two firms on the plane and they declare the prices for the goods. The customers uniformly distributed inside the circle are choosing a firm. The choice (costs) depends on the price plus distance from the customer to the firm. Nash equilibrium is derived for the case when the distance is presented by the Euclidean and Manhattan metrics. Found the solution of the location problem on the plane.

Keywords: Hotelling's duopoly on the plane, equilibrium prices, location game.