ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2010, том 46, № 4, с. 119–120

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ОБ УСИЛЕНИИ ОЦЕНОК В ЗАДАЧАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

© 2010 г. А.А. Заславский

(Москва)

Методы решения задач целочисленного (ЦЛП) и частично целочисленного (ЧЦЛП) линейного программирования основаны на переборе вариантов, образуемых при фиксации части целочисленных переменных и отсеве неперспективных вариантов с помощью вычисления соответствующих оценок значения целевой функции. При этом использование сильных оценочных функций, значения которых близки к оптимальному значению решаемой задачи, позволяет отсеивать большее число вариантов и тем самым сокращать время решения задачи. Наиболее сильными из известных оценок являются так называемые оценки лагранжевой декомпозиции (Juignard, Kim, 1987), которые, однако, отличаются высокой трудоемкостью вычисления. Это, в частности, делает проблематичным применение этих оценок в классических схемах метода ветвей и границ.

В работах (Лебедев, Седова, 2006; Седова, Лебедев, 2007) описан новый метод дискретной оптимизации, названный декомпозиционным (Д-методом). В нем граф вариантов различными способами разбивается на подграфы. В наиболее "представительных" подграфах, задающих "достаточно большое" число вариантов, появляется возможность использования оценок специального вида, предложенных в (Лебедев, 2007), на основе лагранжевой декомпозиции. Эти оценки естественно возникают в задачах ЦЛП/ЧЦЛП специального вида, таких как задача с фиксированными доплатами или задача размещения. Дело в том, что в таких задачах можно выделить подзадачу о рюкзаке, содержащую все целочисленные переменные, и задачу линейного программирования (ЛП). При вычислении оценки эти задачи решаются независимо.

В задачах ЦЛП/ЧЦЛП общего вида такая естественная декомпозиция отсутствует, однако, комбинируя лагранжеву декомпозицию с другими методами построения оценок, ее можно создать искусственно. Способ построения оценок опишем на примере задачи ЦЛП. Распространение его на задачи ЧЦЛП не представляет трудностей.

Рассмотрим задачу:

$$P: \sum_{j \in J} c_j x_j \Rightarrow \max(J = \{1, ..., n\}); \tag{1}$$

$$a^k x \le b_k, \quad k \in K, \quad K = \{1, ..., \bar{k}\}; \tag{2}$$

$$x \in \{0, 1\}^n. \tag{3}$$

Для построения подзадачи о рюкзаке предварительно образуем специальным образом *заменяющее неравенство* (Заславский, Лебедев, 2002, п. 6.3). Для этого релаксируем условия (3) целочисленности вектора x, заменив их на

$$0 \le y_j \le 1, \quad y_j = x_j, \quad j \in J. \tag{4}$$

После этого решим задачу ЛП, определяемую условиями (1), (2), (4). Пусть $\tilde{\lambda}$ – оптимальное решение двойственной задачи ЛП. Добавим к (2) заменяющее ограничение

$$\sum_{k \in K} \tilde{\lambda}_k (a^k x) \le \sum_{k \in K} \tilde{\lambda} b_k, \tag{5}$$

введем равенства $x_j = y_j$ в функцию Лагранжа с множителями w_j и запишем получающуюся задачу, определяющую оценку для P в виде двух подзадач:

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00156).

– подзадача о рюкзаке

$$Q^x: \quad z_1 = \max\left\{ \sum_{j\in J}(c_j - w_j)x_j \,\middle|\, \sum_{k\in K}\tilde{\lambda}_k(a^k x) \le \sum_{k\in K}\tilde{\lambda} b_k; \quad x \in \{0,1\}^n \right\}; \tag{6}$$

– подзадача (ЛП)

$$Q^{yw}: \quad z_2 = \max\left\{ \sum_{j\in J} w_j y_j \,\middle|\, a^k y \le b_k, \quad k\in K; \;\; 0 \le y^j \le 1, \quad j \in J \right\}. \tag{7}$$

Эти подзадачи задают для P оценку

$$z(w) = z_1 + z_2 . \tag{8}$$

В силу неравенства двойственности величина $z(w)$ всегда будет не меньше оптимального значения задачи P. При этом если оптимальные векторы x и y задач (6) и (7) совпадают, то неравенство обращается в равенство. Разумеется, полученная оценка может существенно зависеть от вектора разрешающих множителей w. Для получения достаточно сильной оценки можно минимизировать функцию $z(w)$, используя какой-нибудь из методов негладкой оптимизации, например метод уровней (Гольштейн и др., 1994). Однако полная минимизация может оказаться нецелесообразной, если улучшение оценки, достигнутое на последних итерациях, будет незначительным.

В связи с этим представляется разумным ограничиваться небольшим числом итераций, прекращая их в тот момент, когда векторы x и y оптимальных значений переменных задач (6) и (7) окажутся достаточно близки. При этом существенно, что все задачи ЛП, задающие оценку z_2, имеют одну и ту же систему ограничений. Это позволяет решать их последовательно, каждый раз принимая в качестве начальной точки оптимальное значение предыдущей задачи. В результате время решения задач значительно сократится. Более того, можно ожидать, что при близких значениях w оптимальные значения переменных в соответствующих задачах ЛП либо совпадают, либо находятся в близких вершинах допустимой области, так что переход от решения одной задачи к решению другой будет достигаться за небольшое число итераций симплекс-метода. При использовании метода оптимизации это должно привести к еще большему сокращению времени решения.

Применение оценок (8) в алгоритмах Д-метода или других комбинаторных схемах позволит отсеивать достаточно много вариантов, близких к исходному. Однако по мере фиксации значений переменных качество оценки будет ухудшаться. Поэтому необходимо время от времени менять значения w, решая задачи (6), (7), соответствующие новым вариантам. Критерием для такого изменения может быть расхождение соответствующих векторов x, y. В результате будут возникать новые оценочные функции вида (8), и для оценки следующих вариантов можно будет использовать все найденные до того значения w.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гольштейн Е.Г., Немировский А.С., Соколов Н.А. (1994): Новый алгоритм двойственной декомпозиции с приложением к задачам транспортного типа // *Экономика и мат. методы*. Т. 30. Вып. 2.

Заславский А.А., Лебедев С.С. (2002): Метод узловых векторов целочисленного программирования. Ч. 3: Новая вычислительная схема и ее приложения: Препринт #WP/2002/148. М.: ЦЭМИ РАН.

Лебедев С.С. (2007): О декомпозиции некоторых прикладных задач дискретной оптимизации // *Экономика и мат. методы*. Т. 43. № 4.

Лебедев С.С., Седова С.В. (2006): Декомпозиционный метод целочисленного программирования // *Экономика и мат. методы*. Т. 42. № 3.

Седова С.В., Лебедев С.С. (2007): Декомпозиционный метод дискретной оптимизации. Ч. 1: Подходы к построению декомпозиционных алгоритмов: Препринт # WP/2007/218. М.: ЦЭМИ РАН.

Juignard M., Kim S. (1987): Lagrangean Decomposition: a Model Yielding Stronger Lagrangean Bounds // *Math. Programming*. Vol. 39. № 2.

Поступила в редакцию
21.10.2009 г.