ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2013, том 49, № 2, с. 3–18

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

О МОДЕЛЯХ ПРОГНОЗНО-ПЛАНОВОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

© 2013 г. Э.Б. Ершов, Е.С. Левитин*

(Москва)

Рассматривается новый подход к исследованию социально-экономических проблем и его формализация (математическая модель) для совместного поиска прогноза экзогенных параметров и оптимального плана. Эта модель, приводящая к поиску неподвижной точки для суперпозиции двух многозначных отображений (м.о.), эквивалентна сложной задаче глобальной оптимизации.

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование, прогноз, оптимальный план, параметрическая оптимизация, многозначное отображение, неподвижная точка м.о., задача глобальной оптимизации.

1. ОБСУЖДЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРЕДЛАГАЕМЫЙ ПОДХОД К ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

О работах по оптимальному экономическому планированию в условиях вероятностной неопределенности. Моделирование процессов подготовки и реализации решений и/или планов в условиях неопределенности до сих пор привлекает к себе внимание ученых и практиков многих специальностей, в том числе специалистов в области управляемых процессов, математиков и экономистов. Уже в первой книге по исследованию операций (Морз, Кимбелл, 1956), переведенной на русский язык, рассматривались задачи такого типа. В частности, в задаче обнаружения и уничтожения торговых судов противника подводными лодками было необходимо определить число действующих в составе группы подлодок. От числа подлодок и отношения ширины трассы судов к эффективной дальности их обнаружения зависело среднее число потопляемых судов.

Подход к формализации поиска оптимальных решений в детерминированных и стохастических ситуациях, зародившийся в рамках исследования операций, развивался по многим направлениям. Кратко назовем только те из них, с которыми связаны цели и содержание данной статьи. Детерминированные модели оптимального планирования, в постановках которых случайные факторы и неопределенность исходных данных не считались заслуживающими упоминания, не будут характеризоваться как общеизвестные.

В эконометрическом моделировании стали использоваться модели с дискретным временем, задаваемые системами одновременных соотношений для рассматриваемой последовательности периодов. Модели представляются в виде систем, линейных по эндогенным и экзогенным переменным и аддитивно включаемым случайным ошибкам уравнений и детерминированных тождеств (Greene, 2008). Траектории эндогенных переменных получаются в виде математических ожиданий этих переменных, зависящих от задаваемых значений экзогенных переменных и параметров. Случайные ошибки в исходных уравнениях предполагаются имеющими законы распределений, не зависящие от экзогенных переменных-управлений и эндогенных переменных. Этим же свойством для случайных отклонений эндогенных переменных от их условных математических ожиданий обладают и их законы распределений. При прогнозировании на несколько периодов вперед случайные ошибки в уравнениях для таких периодов могут определять во мно-

* Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках программы президиума РАН (проект 103).

гих моделях недопустимо широкие доверительные области для значений эндогенных переменных. В этих условиях траектории математических ожиданий эндогенных переменных не могут рассматриваться как достаточно адекватно характеризующие будущие состояния моделируемой экономической системы. Но если элементы матриц при эндогенных переменных будут детерминированными функциями экзогенных переменных-управлений, то параметры законов распределений вероятностей для отклонений эндогенных переменных от их условных математических ожиданий оказываются зависящими от управлений. В этом случае задача выбора оптимального управления при задаваемом критерии оптимальности приобретает новые черты, поскольку управление влияет на неопределенность будущих возможных состояний системы. К сожалению, разработка эконометрических моделей с управляемыми законами случайных ошибок в эндогенных переменных осталась по ряду причин на первоначальном уровне.

В теории автоматического управления техническими системами был предложен подход к задачам в стохастических ситуациях (см. например, (Laning, Battin, 1956; Newton, Gould, Kaiser, 1957; Фельдбаум, 1963)). В этих работах для динамической системы переменные состояний были дополнены измеряемыми функциями от них со случайными ошибками. Впоследствии была предложена некоторая классификация стратегий стохастического управления динамическими системами в зависимости от информации, используемой в управлении. В ней выделяются системы управления (регуляторы) с разомкнутым, замкнутым и с размыкаемым обратной связью контурами (Соренсон, 1980; Бар-Шалом, Ци, 1980). В некоторых динамических системах было предложено использовать так называемое *достоверно эквивалентное управление*, в котором случайные переменные заменяются на их ожидаемые значения (условные средние) и получены достаточные условия для того, чтобы такое управление было оптимальным. Влияние управления на неопределенность будущих состояний системы было названо *дуальным эффектом управления*. Были изучены примеры нелинейных динамических систем со стохастическим управлением, для которых дуальный эффект существен и может быть использован. Для нас важно то, что в теории стохастического управления динамическими системами было признано необходимым требовать выполнения таких ограничений на управление, которые не усиливают влияние неопределенности на результаты управления. Такие ограничения должны делать управление более осторожным, чтобы попытаться уменьшить неопределенность в описании переменных состояния.

Р. Беллман (Беллман, 1964; Беллман, Дрейфус, 1965; Беллман, Калаба, 1969) предложил принцип оптимальности для многошаговых, в том числе стохастических, процессов, состоящий в том, что “в любой заданный момент времени, при любых текущем состоянии и предыдущих решениях последующие решения должны определять оптимальную стратегию относительно текущего состояния” (Бар-Шалом, Цы, 1980, с. 87). При реализации такой стратегии в дискретной стохастической задаче до текущего момента включительно известны значения наблюдаемых (измеряемых) величин, являющихся функциями случайных шумов. Следовательно, такая стратегия реализуема в реальном времени, но не может быть описана как детерминированный план действий, корректируемый в процессе его выполнения, если для моделируемой системы предложенное стратегией управление не является достоверно эквивалентным.

Для экономических моделируемых систем переменные в моменты дискретного времени интерпретируются как характеристики последовательных периодов, и сама возможность определения значений наблюдаемых случайных величин до выработки текущего решения должна рассматриваться как удобное, но не вполне правдоподобное допущение. По этой причине при моделировании экономических процессов реализация достижений в теории управляемых стохастических процессов, по крайней мере, в том ее изложении, о котором говорилось выше, вызывала большие трудности и фактически позволяла получать некоторые результаты только теоретического характера. И это в то время, как теория автоматического управления динамическими системами предлагалась и развивалась с явной ориентацией на важные практические приложения.

В прикладном экономическом моделировании неопределенность будущего, и в частности значений экзогенно задаваемых параметров моделей, всегда осознавалась (Вальтер, 1976;Раяцкас, Суткайтис, 1978). Если такие параметры рассматривались как случайные величины, имеющие законы распределения вероятностей, параметры которых экзогенны и не зависят от искомых решений, то в таких моделях находились условные математические ожидания эндогенных переменных. Выполнявшиеся расчеты оценок ковариационных матриц для соответствующих случайных величин оставались в рабочих материалах и не применялись для пересмотра модели, в которой использовались прогнозы ее экзогенных переменных и параметров. Известны многочисленные модели, в которых фактически без специального обоснования был задействован принцип достоверно эквивалентного управления. В частности, такими были модели, описанные в (Яременко, Ершов, Смышляев, 1975; Ершов, 2008). Однако в этих моделях использовались экзогенные прогнозы части переменных и параметров моделей, и при характеристике получаемых решений обращалось внимание на их качественную несогласованность с такими прогнозами и необходимость корректировки последних.

В почти явном виде эта же проблема возникала и обсуждалась в (Биргер, Уринсон, Чарный, 1978; Кольцов, 1980). Однако прогнозы рассматривались как детерминированные величины. При этом безусловные математические ожидания некоторых случайных величин и вполне возможные отклонения от них, реализующиеся при более детально моделируемых взаимодействиях, т.е. при учете дополнительной информации, не рассматривались и не применялись. Таким образом, проблема согласованности прогнозов разного уровня, учета их взаимного влияния осознавалась, но не формализовалась и не решалась.

В теоретических модельных исследованиях экономических систем, которые разрабатывались с различными целями, многие ученые уделяли внимание неопределенности будущего и случайности прогнозируемых показателей и параметров. Среди работ отечественных исследователей отметим статьи (Петраков, Ротарь, 1978; Аркин, 1979; Евстигнеев, Катышев, 1979; Аркин, Евстигнеев, 1979), выполненные сотрудниками ЦЭМИ АН СССР. В них при весьма общих предположениях о происходящих в экономике взаимодействиях и процессах, моделируемых посредством аппарата случайных величин, функций и процессов, законы распределения для которых постоянны и, в принципе, могли бы быть оценены, доказано существование оптимальных или квазиоптимальных решений для моделей из некоторых классов. В таких классах понятие решения определялось, исходя из их особенностей и целей моделирования. Исходные предположения моделей, возможности их наполнения реальными данными и интерпретации получаемых решений фактически почти не обсуждались. Свойства моделей исследовались как самостоятельный объект изучения. Поэтому прикладные аспекты экономических моделей в условиях вероятностной неопределенности, если говорить об используемых в этих моделях соотношениях и влиянии экзогенных параметров случайного характера на получаемые результаты, нельзя характеризовать как уже нашедшие адекватное отражение в конкретных модельных построениях и в методологии моделирования.

В данной статье предлагается достаточно простой и, по-видимому, реализуемый подход к решению проблемы достижения согласованности экзогенных (по отношению к разрабатываемой модели) прогнозов, представленных случайными величинами, и получаемого детерминированного решения модели, интерпретируемого как некоторый план действий. Принципиальные черты этого подхода при определенных предположениях должны быть перенесены на динамические модели экономических процессов. Но в данной статье предлагаемый подход характеризуется для статической ситуации, когда рассматривается одно состояние моделируемой системы.

О недостаточности стандартного аппарата оптимизационного детерминированного моделирования для адекватной математической постановки прогнозно-плановых задач. Как отмечалось ранее, важная особенность подавляющего числа реальных социально-экономических проблем принятия решений состоит том, что при их исследовании возникают оптимизационные модели в условиях неопределенности[1], причем чаще всего рассматривается вероятностная неопределенность. Требуется одновременно искать прогнозы экзогенных параметров и показатели оптимального плана, причем от неизвестных значений прогнозов – экзогенных параметров для оптимизации – зависит не только оптимальный план, но и сами прогнозы могут существенно зависеть от искомых оптимальных планов. Это объясняется рядом причин: утвержденные и принятые к исполнению планы могут влиять на процессы, формирующие значения прогнозов, план

[1] Как известно, при постановке оптимизационных задач в условиях неопределенности нет универсального определения для самого понятия “оптимальное решение”. Чтобы хоть как-то преодолеть эту принципиальную трудность, предлагаются те или иные редукции к детерминированной оптимизации.

и прогноз обычно связаны совместными условиями и т.д. (Ершов, Левитин, 1989, 1992; Ершов, 2008). Подчеркнем, что декомпозиция прогнозно-плановой задачи на предварительно решаемую задачу прогнозирования с игнорированием зависимости прогнозов от планов и решаемую затем задачу оптимального планирования с найденными значениями прогнозных показателей часто является некорректной[2].

О прогнозировании как процессе и требованиях к прогнозному вектору как результату этого процесса. В задачах прогнозно-планового типа часть экзогенных параметров, входящих в оптимизационный блок, – это детерминированные функции искомого векторного плана u и случайного вектора ξ. Поэтому значения вектора ν экзогенных параметров необходимо прогнозировать. Естественно, что при известном плане u такой прогноз делается на основе соответствующего прогноза случайного вектора ξ.

Модель, с помощью которой вводится вектор ξ и его закон распределения, рассматривается как внешняя по отношению к модели оптимизационного блока. Результаты прогнозирования случайного вектора ξ должны быть преобразованы в такой прогноз вектора ν экзогенных параметров, который допускал бы его включение в прогнозно-плановую модель; это потребует определенных предположений.

Под *прогнозированием* случайного вектора ξ понимается формирование такого минимального (относительно включения) или близкого к нему (близкого – в метрике Хаусдорфа) множества Θ_* для возможных значений ξ, что любая реализация ξ с требуемой вероятностью принадлежит множеству Θ_*.

Под *прогнозированием* вектора ν экзогенных параметров (при фиксированном значении планового вектора u) понимается формирование такого минимального относительно включения или близкого к нему в метрике Хаусдорфа множества $H_*(u)$ для возможных значений ν, что при данном плане u и любой реализации θ случайного вектора ξ реализуемый в этих условиях вектор ν с требуемой вероятностью принадлежит множеству $H_*(u)$.

О неформальном содержании математических моделей прогнозно-планового типа. В предлагаемых моделях совместного нахождения прогноза и оптимального плана (ниже они называются *моделями прогнозно-планового типа*) вектор искомых переменных разбит на две группы: детерминированный вектор u плановых показателей (план) и вектор ν экзогенных параметров для задачи оптимального планирования, принадлежащий *прогнозному множеству* $H_*(u)$ при прогнозировании случайного вектора ξ, от значений которого, также как и от планового вектора u, зависит значение вектора ν. При этом план u должен быть оптимальным для выбранного значения прогнозного вектора ν экзогенных параметров, а само значение вектора ν должно зависеть не только от реализации случайного вектора экзогенных параметров, но и от того, как был получен плановый вектор u.

Требование, чтобы при выбранном значении прогноза план был допустимым и оптимальным, приводит к многозначному отображению экстремального типа (Левитин, 1995), а зависимость прогноза от плана – к еще одному многозначному отображению. Согласование прогноза и плана – представляет собой выполнение некоторого условия для двух многозначных отображений, одно из которых является экстремальным[3].

Введем **основные переменные** и соотношения для моделей прогнозно-планового типа. Пусть u – векторный план (искомый вектор для задачи планирования); ν – вектор экзогенных параметров для задачи планирования (искомый вектор для задачи прогнозирования); вектор ν может зависеть от скалярной или векторной случайной величины ξ, значения которой необходимо прогнозировать после нахождения прогнозного множества для случайного вектора ξ при каждом фиксированном плане u легко можно найти (разд. 2) и прогнозное множество для вектора ν. U – множество раздельных, т.е. независимых от экзогенных параметров, ограничений на

[2] Подобная декомпозиция приемлема лишь в тех случаях, когда принятие и доведение до сведения экономических агентов плановых показателей приводит к настолько слабому влиянию на прогноз, что этим влиянием можно пренебречь.

[3] Впервые подобная постановка для задач прогнозно-планового типа была рассмотрена в работе (Ершов, Левитин, 1992).

выбор вектора u; V – множество раздельных, т.е. независимых от векторного плана, ограничений на выбор вектора ν. Чаще всего U и V – это параллелепипеды в евклидовых пространствах соответствующей размерности. $\mathcal{Z}$ – множество совместных ограничений на выбор пары $\{u, \nu\}$; ниже предполагается, что *множество* $\mathcal{Z}$ *имеет функциональное задание*, т.е.

$$\mathcal{Z} = \{z = (u, \nu) \in U \times V: f_i(u, \nu) \le 0 \ (i \in I), g_j(u, \nu) = 0 (j \in J)\}, \tag{1}$$

где I и J – конечные множества индексов, а f_i $(i \in I)$ и g_j $(j \in J)$ – числовые функции, заданные на декартовом произведении множеств U и V. θ – вектор из области Θ значений, которые может принимать случайный скаляр или случайный вектор ξ при его реализации.

$\Psi = \Psi(u, \theta)$ – вектор-функция (с числом компонент, равным размерности вектора ν) от пары $\{u, \theta\}$, позволяющая для заданных u и θ находить вектор ν по формуле: $\nu = \Psi(u, \theta)$. Ниже будем предполагать, что $\Psi(u, \bullet)$ – известное *аффинное* отображение вектора θ в пространство экзогенных векторов ν (очевидно, что коэффициенты этого отображения – известные числовые функции от векторного плана u), т.е. $\Psi(u, \theta) = T(u)\theta + \chi(u)$, где $T(\bullet)$ – матричная функция, $\chi(\bullet)$ – вектор-функция соответствующей размерности, непрерывно зависящие от u. В принятых предположениях стохастический объект $\Psi(u, \xi)$ – это случайная вектор-функция от u, обладающая следующей важной спецификой: закон распределения для суперпозиции $\Psi(u, \xi)$ определяется законом распределения для случайного вектора ξ и детерминированной зависимостью от u коэффициентов аффинного отображения Ψ.

Θ_* – доверительное множество для прогноза значений случайного вектора ξ, где

$$\Psi(u, \Theta_*) = \{\nu \in V: \nu = \Psi(u, \theta), \theta \in \Theta_*\}, \tag{2}$$

т.е. $\Psi(u, \Theta_*)$ – образ множества Θ_* при отображении $\Psi(u, \bullet)$. Таким образом, если Θ_* – доверительное множество для прогноза случайного вектора ξ, то при данном плане u в качестве доверительного множества для прогноза значений случайного вектора $\Psi(u, \xi)$ используется множество $\Psi(u, \Theta_*)$.

$\mathrm{Pr}_U \mathcal{Z} = \mathcal{U}$ – декартова проекция множества $\mathcal{Z}$ на компоненту U в декартовом произведении $U \times V$, т.е. совокупность векторов $u \in U$ таких, что при некотором $\nu \in V$ пара $\{u, \nu\} \in \mathcal{Z}$. Очевидно, что

$$\mathcal{U} = \{u \in U: \exists\ \nu \in V, \text{ для которого } f_i(u, \nu) \le 0 (i \in I), g_j(u, \nu) = 0 (j \in J)\}. \tag{3}$$

При любом $u \in \mathcal{U}$ обозначим

$$R(u) = \{\nu \in V: f_i(u, \nu) \le 0 \quad (i \in I),\ g_j(u, \nu) = 0 \quad (j \in J)\}, \tag{4}$$

где $R(u)$ – это сечение множества $\mathcal{Z}$ при фиксации первой компоненты пары $\{u, \nu\}$. Далее, пусть $\mathrm{Pr}_V \mathcal{Z} = \mathcal{V}$ – декартова проекция множества $\mathcal{Z}$ на компоненту V в декартовом произведении $U \times V$, т.е. совокупность векторов $\nu \in V$ таких, что при некотором $u \in U$ пара $\{u, \nu\} \in \mathcal{Z}$. Тогда

$$\mathcal{V} = \{\nu \in V: \exists\ u \in U, \text{ для которого } f_i(u, \nu) \le 0 (i \in I), g_j(u, \nu) = 0 (j \in J)\}. \tag{5}$$

Наконец, при любом $\nu \in \mathcal{V}$ обозначим

$$Q(\nu) = \{u \in U: f_i(u, \nu) \le 0 \quad (i \in I), g_j(u, \nu) = 0 \quad (j \in J)\} \tag{6}$$

($Q(\nu)$ – сечение множества $\mathcal{Z}$ при фиксации второй компоненты пары $\{u, \nu\}$).

Так как по определению $\mathcal{V}$, условие, что множество $Q(\nu) \ne \varnothing$ и $\nu \in \mathcal{V}$ – эквивалентны, то для точечно-множественного отображения $Q(\bullet)$ его область определения $\mathrm{dom}\ Q(\bullet) = \mathcal{V}$.

Краткая характеристика формального содержания математических моделей прогнозно-планового типа при наличии случайного вектора или случайной вектор-функции. Оптимизация плана u в условиях вероятностной неопределенности с вектором экзогенных параметров ν, детерминированным образом зависящего от выбранного плана u и случайного вектора ξ, заключается, по существу, в минимизации по u некоторой функции $\mathcal{I}_\xi$ на некотором множестве $\mathcal{G}_\xi$, причем и критериальная функция $\mathcal{I}_\xi$, и допустимое множество $\mathcal{G}_\xi$ в определенном смысле зависят от реализации случайного вектора ξ.

Пусть вектор экзогенных параметров ν определяется посредством детерминированной функции Ψ, зависящей от планового вектора u и прогноза θ для случайного вектора ξ, т.е. $\nu = \Psi(u, \theta)$, причем функция Ψ является аффинной по θ. Ниже предполагается, что функция $\mathcal{I}_\xi$ и множество $\mathcal{G}_\xi$ имеют вид:

$$\mathcal{I}_\xi(u) = F(u, \nu), \quad \mathcal{G}_\xi = Q(\nu), \text{ где } \nu = \Psi(u, \theta). \tag{7}$$

Здесь $Q(\nu)$ – множество допустимых планов, а $F = F(u, \nu)$ – определенная на множестве $U \times V$ числовая функция, которую при фиксированном ν стремится минимизировать по $u \in Q(\nu)$ планирующий орган, выбирающий вектор u (*планово-оптимизационный блок*).

Как указывалось ранее, под задачей прогнозно-планового типа понимается одновременный и согласованный выбор пары $z = \{u, \nu\}$, где u – искомый плановый вектор, а ν – прогнозное значение вектора экзогенных параметров, детерминированным образом зависящее от планового вектора u и от случайного вектора ξ.

В теоретическом плане аналогичной рассмотренной (но, увы, в практическом отношении далеко не в полной мере) является и более сложная ситуация, когда стохастический объект ξ – случайная вектор-функция $\xi(\bullet)$ от векторного плана u, которая подлежит прогнозированию, так как при заданном плане u результатом процесса прогнозирования для случайного вектора $\xi(u)$ является вектор ν *той же природы, что и значения случайной величины* ξ. В такой ситуации появляются принципиальные сложности с информационным обеспечением прогнозного блока, так как для случайного вектора $\xi(u)$ требуется найти его функцию распределения при каждом плане u, а это – трудно реализуемая задача.

О предлагаемом подходе к понятию "решение прогнозно-плановой задачи" или понятию "рациональный выбор прогнозно-плановых показателей с точки зрения совместных ограничений на прогноз и план, а также их возможной реализации". При любом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обозначим $H(u)$ множество таких прогнозов для значений вектора ν, которые в определенном смысле наиболее вероятны при реализации данного плана u. Многозначное отображение $H(\bullet)$ – это прогнозный блок; его описанию будет посвящен разд. 3.

Далее, при любом фиксированном векторе $\nu \in \mathcal{V}$ множество

$$M_0(\nu) = \operatorname{Arg\,min}\{F(u, \nu) : u \in Q(\nu)\}, \tag{8}$$

которое есть *экстремальное отображение* множества $\mathrm{Pr}_V\mathcal{Z}$ в совокупность всех подмножеств множества $Q(\nu)$, назовем *множеством оптимальных планов, возможных для реализации при данном варианте прогноза* ν.

Вектор $\hat{z} = (\hat{\nu}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}$ называется *решением прогнозно-плановой задачи,* или *рациональным выбором прогнозно-плановых показателей*, с точки зрения совместных ограничений на прогноз и план, а также их возможной реализации, если

$$\hat{u} \in M_0(\hat{\nu}), \ \hat{\nu} \in H(\hat{u}). \tag{9}$$

Ниже будет показано, что постановки задач прогнозно-планового типа в основном отличаются по способам моделирования прогнозного блока.

Рассмотрим многозначное отображение $\mathcal{A}(\bullet) = M_0(H(\bullet))$ из $\mathcal{U}$ в множество $2^{\mathcal{U}}$ и многозначное отображение $\mathcal{B}(\bullet) = H(M_0(\bullet))$ из $\mathcal{V}$ в множество $2^{\mathcal{V}}$. Тогда условия (9) означают, что $\hat{u}$ – неподвижная точка многозначного отображения $\mathcal{A}(\bullet)$, $\hat{\nu}$ – неподвижная точка многозначного отображения $\mathcal{B}(\bullet)$, т.е. условия (9) эквивалентны каждому из соотношений:

$$\hat{u} \in \mathcal{A}(\hat{u}); \ \hat{\nu} \in \mathcal{B}(\hat{\nu}). \tag{10}$$

Численный поиск искомой пары $\{\hat{u}, \hat{\nu}\}$, т.е. алгоритмизация прогнозно-плановой задачи по совокупности переменных u, ν, приводит к сложной и интересной невыпуклой задаче глобальной оптимизации. Заметим, что в разработке конструктивных способов, на которых могли бы базироваться численные методы решения подобных задач, появился существенный прогресс (Левитин, 2011, 2012).

Для большей простоты и наглядности принципиальных подходов в данной работе приводится лишь статическая модель прогнозно-планового типа. Однако для динамических моделей прогнозно-планового типа[4], представляющих основной интерес, в ряде важных для приложений случаев приходится делать более сложное описание искомых переменных – планов и прогнозов, так как этого требуют содержательные аспекты задачи. Например, прогнозный вектор ν и плановый вектор u могут иметь некоторые общие компоненты и/или обладать другими особенностями. Следует отметить, что эти особенности хотя и несколько осложняют формализацию задачи, но принципиально мало ее меняют – с точки зрения предлагаемых ниже основных принципиальных подходов.

Иллюстративный пример (одно из возможных экономических приложений моделей прогнозно-планового типа). Для базовой модели простейшего производителя кратко рассмотрим некоторые важные аспекты в ситуации, когда прогнозно-плановый подход перспективен или даже необходим.

Пусть предприятие или фирма производит однородный продукт, планирует свою деятельность в расчете на определенный конечный период времени и продает ее торговым посредникам. Говоря точнее, предположим, что на начало этого периода предприятие располагает финансовыми средствами в объеме $r_0 > 0$, запасами готовой продукции $q_0 \geq 0$ и способно произвести в течение рассматриваемого периода продукцию в объеме $x \equiv u_1 \geq 0$, который удовлетворяет ограничению $u_1 \leq h(\mathcal{I})$, где $\mathcal{I} = u_2 \geq 0$ – объем инвестиций, $h(0) > 0$ и $h(\bullet)$ – известная возрастающая функция. Далее, пусть предприятию известны:

1) цена p_0 продажи его продукции в предшествующий период, заменяющая ему неизвестную среднюю цену аналогичной продукции в планируемом периоде;

2) функция спроса $D(p; p_0)$ на продукцию , в которой $p \equiv u_3 > 0$ – выбираемая производителем цена его продукции;

3) суммарные затраты $f(u_1, u_2)$ на производство продукции в объеме u_1.

Пусть продолжительность временного периода, для которого предприятие планирует свою деятельность – выпускает однородный продукт и продает его торговым посредникам – такова, что принимаемые допущения для него можно считать выполненными, причем средства от продажи продукции по цене p поступают, а затраты $f(u_1, u_2)$ расходуются в течение *этого же рассматриваемого периода.*

Производитель рассматривает целесообразность получения заемных средств (кредита) в объеме $y \equiv u_4 \geq 0$ на условиях оплаты кредита в течение будущих периодов и определяет неотрицательные значения неотрицательных переменных x, $\mathcal{I}$, p, y, т.е. переменных своего плана $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, решая оптимизационную задачу:

$$r + bh(u_2) + c\max\{u_1 + q_0 - D(u_3; p_0), 0\} - du_4 \to \max$$

при ограничениях

$$r_0 + u_4 - u_2 \geq 0,\, h(u_2) - u_1 \geq 0,\, r \equiv a(r_0 + u_4 - u_2) + u_3 \min\{D(u_3; p_0),\, u_1 + q_0\} - f(u_1, u_2) \geq 0.$$

Параметры a, b, c, d прогнозируются и интерпретируются следующим образом. Превышение (на начало периода) располагаемых “свободных” финансовых средств $(r_0 - u_4)$ над инвестициями u_2 может использоваться в течение периода альтернативным способом и превращается в конце периода в средства $a(r_0 + u_4 - u_2)$, где прогнозируемый параметр a в более общей ситуации может быть функцией от $(r_0 + u_4 - u_2)$. Далее, параметр b характеризует прирост стоимости “основных фондов” производителя в результате инвестиций и реализации его продукции (слагаемое $bh(u_2)$ в критерии максимизации может быть представлено в функции вида $b\Psi(u_2)$). Параметр c характеризует возможную цену p_1 продажи (в будущем) превышения ресурсов продукции $u_1 + q_0$ над спросом $D(u_3; p_0)$, приведенную (с помощью дисконтирования денежных потоков) к цене в рассматриваемом периоде. Наконец, параметр d характеризует расходы по оплате кредита. Слагаемое du_4 в критерии может быть задано в более общем виде – посредством некоторой функции $d(u_4)$.

Введенные функции в последующих периодах могут изменяться в зависимости от результатов производственной деятельности в рассматриваемом периоде, т.е. от “рыночной репутации”

[4] Им планируется посвятить отдельную работу.

производителя, в том числе от объема произведенной продукции u_1, от объема продаж $\min\{D(u_3, p_0), u_1 + q_0\}$ и от стоимости проданной продукции. Такие зависимости могут проявляться и в рассматриваемом периоде, например, если продукция производителя важна или составляет существенную долю рынка.

Прогнозный блок модели, эндогенными переменными ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 которого являются параметры a, b, c и d, определяется с учетом условий, в которых функционирует производитель и частично – результатов его функционирования в рассматриваемом периоде. Для определения детерминированных значений переменных ν_1, ν_2, ν_3 и ν_4 используются эндогенные переменные планового блока и случайные величины, математические ожидания и возможные реализации которых принадлежат определяемым доверительным областям.

Детальные описания вариантов прогнозного блока опускаются ввиду их многочисленности и разнообразия. Модель допускает конкретизацию и обобщения во многих направлениях, сохраняя черты прогнозно-планового подхода. В ней производитель не оказывает воздействия на экономическую среду как целое, но его планы и их реализация изменяют условия взаимодействия производителя с этой средой.

Некоторые особенности моделей прогнозно-планового типа. Описание почти любой статической или динамической модели прогнозно-планового типа и метода нахождения ее решения – согласованных между собой прогноза и плана, – представляет самостоятельную и требующую детального рассмотрения задачу. Как правило, “плановый блок” такой модели, в котором содержатся соотношения, связывающие эндогенные и экзогенные переменные, а также экзогенно задаваемые параметры этого блока, использует большое число уравнений и неравенств, постулируемых на базе некоторой версии экономической теории и результатов экспериментальных исследований.

Задаваемые экзогенные переменные и параметры (а в динамических моделях – их предполагаемые согласованными описания динамики) представляют некоторый вариант прогноза, полученный эвристически или модельно. В этом прогнозе возможное существенное влияние искомого “плана” далеко не всегда можно считать учтенным. Особенно это имеет место в случае, если ставится и решается задача преодоления в плане сложившихся инерционных и неблагоприятных тенденций или экзогенно задаются целевые установки, достижение которых предполагает активное воздействие планируемых и реализуемых решений на прогнозируемые показатели модели.

Если допустимое множество решений для планового блока является достаточно широким и допускает качественно различающиеся варианты планов, то возникает опасность противоречия между экзогенными показателями этого блока, принимаемыми при их подготовке, и получаемыми оптимальными планами. Такие противоречия могут преодолеваться эвристически с помощью корректировки экзогенных показателей или (хотя бы частично, но в главном) в результате разработки и применения прогнозного блока, в котором используются эндогенные переменные плана.

Примеры социально-экономических проблем, для решения которых целесообразно применять модели прогнозно-планового типа.

1. Производственно-экономические задачи планирования и прогнозирования.

2. Оптимизация функционирования и развития производственной инфраструктуры.

3. Оптимизация производственной программы и материально-производственной базы крупного предприятия с одновременным прогнозированием внешних (т.е. рыночных) условий его деятельности. Это имеет место, когда предприятие играет столь важную роль во всей отрасли, что его планы – номенклатура и объем выпускаемой продукции – заметно влияют на конъюнктуру рынка в отрасли, то прогноз показателей рынка зависит от производственного плана и цен на выпускаемую продукцию, намечаемых одним из очень крупных предприятий отрасли.

4. Оптимизация производственной программы крупного промышленного предприятия с учетом прогнозов возможного ущерба и штрафных санкций за него от вредных экологических последствий производства (вербальная и математическая постановка имеется в работе (Ершов, Левитин, 1992)).

5. Динамическая модель развития группы взаимосвязанных производственных предприятий, научных и конструкторских организаций, проектирующих и изготавливающих высоко техноло-

гичную, инновационную для российской экономики продукцию и обеспечивающих ее эффективное сопровождение.

Ядра таких групп (комплексов) должны формироваться в аэрокосмической, автомобильной, фармацевтической, телекоммуникационной и информационной отраслях. Прогнозируемые экзогенные переменные и параметры модели определяют динамику эндогенных переменных планового блока, но последние воздействуют на “внешние условия” по отношению к производству и реализации продукции, в том числе на условия конкуренции на внутреннем и внешнем рынках.

6. Планирование (на федеральном или региональном уровне) материально-производственной базы отраслей “Образование”, “Культура” с одновременным прогнозированием потребительского спроса на использование объектов и/или продукции этих отраслей.

7. Оценка эффективности и отбор инвестиционных проектов (из всего комплекса проектов, представленных на конкурс).

В этой задаче искомым плановым вектором является набор оценок эффективности для всей совокупности инвестиционных проектов, а прогнозом – вектор, характеризующий внешние условия протекания инвестиционных процессов для каждого рассматриваемого проекта при его практической реализации.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ПРОГНОЗОВ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ВЫБРАННОМ ПЛАНЕ

Предположим, что случайный вектор ξ, вектор ν и аффинная по θ вектор-функция $\Psi = (u, \theta)$ имеют следующую блочную структуру: $\xi = (\xi^{(1)}, ..., \xi^{(K)})$, $\nu = (\nu^{(1)}, , \nu^{(K)})$, где K – число блоков у векторов ξ и ν; $\xi^{(k)} \in \mathbb{R}^{L(k)}$, $\nu^{(k)} \in \mathbb{R}^{d(k)}$; вектор-функция $\Psi(u, \theta) = (\Psi^{(1)}(u, \theta^{(1)}), ..., \Psi^{(K)}(u, \theta^{(K)}))$, где $\theta^{(k)} \in \mathbb{R}^{L(k)}$, $\Psi^{(k)} \in \mathbb{R}^{d(k)}$, причем если вектор $\theta^{(k)}$ – это реализация случайного вектора $\xi^{(k)}$, то $\nu^{(k)} = \Psi^{(k)}(u, \theta^{(k)}) = \mathrm{T}^{(k)}(u)\theta^{(k)} + \chi^{(k)}(u)$.

2.1. Формализация множества возможных прогнозов для случайной величины/вектора $\boldsymbol{\xi}$. Заметим, что социально-экономические проблемы относятся к той важной области приложений теории вероятностей, для которой специфика области делает нерациональным рассмотрение значений случайной величины (случайного вектора), если эти значения с недопустимо малой вероятностью. Это обстоятельство далее учитывается при построении так называемых доверительных множеств, которые используются для прогноза.

При фиксированном $k = 1, …, K$ рассмотрим следующие ситуации для $\xi^{(k)}$:

α) $\xi^{(k)}$ – скалярная случайная величина;

β) $\xi^{(k)} = (\xi_l^{(k)}, l = 1, ..., L(k))$ – векторная случайная величина размерности $L(k)$ с независимыми компонентами $\xi_l^{(k)}$;

(γ) $\xi^{(k)}$ – векторная случайная величина размерности $L(k)$ с зависимыми компонентами, причем будем предполагать, что либо $\xi^{(k)}$ принимает конечное число векторных значений $\theta^{(k, s)}$ с известной вероятностью $q(k, s)$ ($s = 1, ..., S(k)$), либо случайный вектор $\xi^{(k)}$ имеет нормальное распределение с известными векторными параметрами $a^{(k)}$ и $\sigma^{(k)}$.

Начнем с **ситуации $\boldsymbol{\alpha}$**. В качестве доверительного множества $\Theta_*^{(k)}$ для случайной величины $\xi^{(k)}$ будет выбираться определяемый ниже отрезок с центром в точке $\mathbf{E}[\xi^{(k)}]$ – математическом ожидании случайной величины $\xi^{(k)}$. Для этого зададим некоторое малое положительное число $\delta_1^{(k)}$ такое, что вероятность $p^{(k)} = 1 - \delta_1^{(k)}$ достаточно близка к 1, и найдем (точно или приближенно) максимальное положительное число $\delta_2^{(k)} = \delta_2[\xi^{(k)}, \delta_1^{(k)}]$, для которого $P(|\theta - \mathbf{E}[\xi^{(k)}]| \le \delta_2^{(k)}) \ge$ $\ge 1 - \delta_1^{(k)}$. Затем положим

$$\Theta_*^{(k)} = \{\theta \in \mathbb{R}: |\theta - \mathbf{E}[\xi^{(k)}]| \le \delta_2^{(k)}\}. \tag{11}$$

Отрезок $\Theta_*^{(k)} = \Theta_*^{(k)}(\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)})$ будем называть *множеством прогнозов, возможных для реализации скалярной случайной величины* $\xi^{(k)}$.

Для ряда конкретных видов распределений случайной величины, например, когда она с известной вероятностью принимает каждое из конечного числа известных значений или случайная величина является непрерывной с нормальным законом распределения, множество $\Theta_*(\delta_1, \delta_2)$ может быть найдено с помощью несложного алгоритма.

В **ситуации β** прогноз каждой компоненты случайного вектора $\xi^{(k)}$ можно делать независимо от других компонент по одним и тем же формальным правилам, приведенным для скалярной случайной величины. Однако следует учесть, что у различных компонент случайного вектора $\xi^{(k)}$ функции распределения могут обладать различными свойствами. Поэтому параметры $\delta_1^{(k)}$ и $\delta_2^{(k)} = \delta_2[\xi^{(k)}, p^{(k)}]$ должны зависеть еще и от номера компоненты, т.е. быть векторами размерности $L(k)$:

$$\delta_1^{(k)} = (\delta_{1l}^{(k)}, l = 1, ..., L(k)), \quad \delta_2^{(k)} = (\delta_{2l}^{(k)}, l = 1, ..., L(k)).$$

Выбрав вектор $\delta_2^{(k)}$, можно положить

$$\Theta_*^{(k)} = \{\theta = (\theta_1, ..., \theta_{L(k)}) \in \mathbb{R}^{L(k)}: |\theta_l - \mathbf{E}[\xi_l^{(k)}]| \le \delta_{2l}^{(k)}, \quad l = 1, ..., L(k)\}. \tag{12}$$

Таким образом, в ситуации (β) в качестве доверительного множества $\Theta_*^{(k)} = \Theta_*^{(k)}(\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)})$ в пространстве $\mathbb{R}^{L(k)}$ выбран параллелепипед с центром в точке $\mathbf{E}[\xi^{(k)}]$.

Рассмотрим теперь **ситуацию** γ. Пусть $\xi^{(k)}$ принимает конечное число векторных значений $\theta^{(k, s)}$ с известными вероятностями $q(k, s)$, $s = 1, \ldots, S(k)$. Выберем достаточно малое число $\delta_1^{(k)}$. Тогда, учитывая, что

$$\mathbf{E}[\xi^{(k)}] = q(k,1)\,\theta^{(k,1)} + ... + q(k, S(k))\,\theta^{(k, S(k))},$$
$$\mathbf{E}[\xi_l^{(k)}] = q(k,1)\,\theta_l^{(1, S(1))} + ... + q(k, S(k))\,\theta_l^{(k, S(k))},$$

можно предложить сравнительно простой алгоритм для нахождения минимального из положительных чисел $\delta_2^{(k)}$, для которых выполнено условие

$$P(\max{}_{1 \le l \le L(k)} |\theta_l - \mathbf{E}[\xi_l^{(k)}]| \le \delta_2^{(k)}) \ge 1 - \delta_1^{(k)}.$$

Как и ранее, можно положить

$$\Theta_*^{(k)} = \{\theta \in \mathbb{R}^{L(k)}: |\theta_l - E[\xi_l^{(k)}]| \le \delta_2^{(k)}\ (l = 1, ..., L(k))\}. \tag{13}$$

Таким образом, в качестве доверительного множества $\Theta_*^{(k)} = \Theta_*^{(k)}(\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)})$ в пространстве $\mathbb{R}^{L(k)}$ выбран куб с центром в точке $\mathbf{E}[\xi^{(k)}]$.

Пусть случайный вектор $\xi^{(k)}$ имеет нормальное распределение с плотностью

$$f^{(k)}(\theta^{(k)}) = [(2\pi)^{L(k)} \det \Gamma^{(k)}]^{(-1/2)} \exp\{(-1/2)\langle [\Gamma^{(k)}]^{-1}(\theta^{(k)} - a^{(k)}), \theta^{(k)} - a^{(k)}\rangle\},$$

где $a^{(k)} = \mathbf{E}[\xi^{(k)}]$, $\Gamma^{(k)} = \Gamma[\xi^{(k)}] = ((\gamma_{i,j}^{(k)}))(i, j = 1, ..., L(k))$ – ковариационная матрица, т.е. $\gamma_{i,j}^{(k)} = \mathbf{E}[(\xi_i^{(k)} - a_i^{(k)})(\xi_j^{(k)} - a_j^{(k)})]$. В этой ситуации, как известно, вероятность попадания в эллипсоид $\langle [\Gamma^{(k)}]^{-1}\ (\theta^{(k)} - a^{(k)}),\ \theta^{(k)} - a^{(k)}\rangle \le \delta_2$ дается некоторой известной числовой функцией $t_k(\delta_2)$ от δ_2. Поэтому при заданном $\delta_1^{(k)}$ искомое число $\delta_2^{(k)}$ – это наименьший положительный корень уравнения $w_k(\delta_2) = \delta_1^{(k)}$. Итак, в качестве $\Theta_*^{(k)} = \Theta_*^{(k)}(\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)})$ в пространстве $\mathbb{R}^{L(k)}$ можно выбрать эллипсоид $\Theta_*^{(k)} = \{\theta \in \mathbb{R}^{L(k)}: \langle [\Gamma^{(k)}]^{-1}(\theta^{(k)} - a^{(k)}), \theta^{(k)} - a^{(k)}\rangle \le \delta_2^{(k)}\}$.

Далее для простоты обозначений δ_1 и δ_2 – наборы векторов $\delta_1^{(k)}$ и $\delta_2^{(k)}$, а $\Theta_{\delta_1, \delta_2}$ – набор доверительных множеств $\Theta_*^{(k)} = \Theta_*^{(k)}(\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)})$, $k = 1, ..., K$.

2.2. Формализация множества рациональных прогнозов для вектора ν экзогенных параметров модели. Зная прогнозное множество $\Theta_{\delta_1, \delta_2}$ для вектора θ, можно построить множество

$$\Phi(u, \Theta_{\delta_1, \delta_2}) = \{\nu \in V: \nu = \Psi(u, \theta), \theta \in \Theta_{\delta_1, \delta_2}\} = \{\nu \in V: \nu = \mathrm{T}(u)\theta + \chi(u), \theta \in \Theta_{\delta_1, \delta_2}\},$$

которое при фиксированном плане u является образом прогнозного множества $\Theta_{\delta_1, \delta_2}$ при аффинном преобразовании $\nu = \mathrm{T}(u)\theta + \chi(u)$.

Чтобы дать конструкцию построения прогнозного множества для вектора ν экзогенных параметров, нам потребуется для любого числа $\delta \ge 0$ ввести т.н. понятие δ-приближенной точки для ограничений $\{u, \nu\} \in \mathcal{Z}$. Вектор $z_\delta = \{u_\delta, \nu_\delta\} \in U \times V$ назовем δ-*приближенной*, или δ-*допустимой*, *точкой для ограничений* $\{u, \nu\} \in \mathcal{Z}$, если $f_i(u, \nu) \le \delta(i \in I), |g_j(u, \nu)| \le \delta(j \in J)$. Совокупность всех δ-допустимых точек для ограничений $\{u, \nu\} \in \mathcal{Z}$ обозначим $\mathcal{Z}_\delta$; очевидно, что $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}$. Далее, для любых $u \in \mathcal{U}$ и положительного числа $\delta \ge 0$ обозначим

$$R_\delta(u) = \{\nu \in V: f_i(u, \nu) \le \delta(i \in I), |g_j(u, \nu)| \le \delta(j \in J)\} = \{\nu \in V: \{u, \nu\} \in Z_\delta\}.$$

$R_\delta(u)$ будем называть *множеством экзогенных векторов* $\nu \in V$, *с точностью до числа* δ *согласованных с планом и по совместным с ним ограничениям* $\{u, \nu\} \in \mathcal{Z}$. Легко убедиться, что для любых $u \in U$, $\nu \in V$ условия $\{u, \nu\} \in \mathcal{Z}_\delta$ и $\nu \in R_\delta(u)$ эквивалентны.

Задавая теперь некоторое δ_3, нетрудно построить прогнозное множество $H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u)$. Для этого достаточно положить

$$H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u) = \Phi(u, \Theta_{\delta_1, \delta_2}) \cap R_{\delta_3}(u). \tag{14}$$

$H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u)$ будем называть *множеством рациональных прогнозов, возможных для реализации вектора* ν (с точностью до векторных параметров δ_1, δ_2, δ_3) *при данном плане u.*

3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ПРИБЛИЖЕННЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ПРИ ВЫБРАННОМ ПРОГНОЗЕ (ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ БЛОК)

Формализация множества рациональных планов при фиксированном прогнозе ν легко делается на основе детерминированной оптимизации. Рассмотрим определенный на множестве $\mathcal{V} = \mathrm{Pr}_V \mathcal{Z}$ функционал $m(\bullet)$, где

$$m(\nu) = \inf\{F(u, \nu): u \in Q(\nu)\} \tag{15}$$

(предполагается, что значение $m(\nu)$ конечно при любом $\nu \in \mathcal{V}$); $m(\bullet)$ называется *функцией параметрического минимума для оптимизационного блока,* состоящего в решении задачи

$$F(u, \nu) \to \min, \quad u \in Q(\nu). \tag{16}$$

Множество $M_0(\nu) = \mathrm{Arg}\min\{F(u, \nu): u \in Q(\nu)\}$ называется *множеством оптимальных решений задачи* (16). Если при любом фиксированном $\nu \in \mathcal{V}$ множество $M_0(\nu)$ не пусто, то на $\mathcal{V}$ определено многозначное отображение $M_0(\bullet)$ со значениями в множестве $\mathcal{U}$; в частности, если при любом фиксированном $\nu \in \mathcal{V}$ множество $M_0(\nu)$ не пусто и состоит из единственного элемента $u_0[\nu]$, тогда на множестве $\mathcal{V}$ определен экстремальный оператор $u_0[\bullet]$.

На практике вместо элементов множества $M_0(\nu)$ приходится рассматривать *приближенные оптимальные решения*, т.е. элементы более широкого множества. Если при любом фиксированном $\nu \in \mathcal{V}$ множество $Q(\nu)$ имеет простой вид и ограничениям $u \in Q(\nu)$ легко удовлетворить точно, то при любом неотрицательном δ можно рассмотреть следующее множество δ-приближенных оптимальных решений для оптимизационного блока:

$$M_\delta(\nu) = \{u \in Q(\nu): F(u, \nu) \le m(\nu) + \delta\} \tag{17}$$

(очевидно, что при $\delta = 0$ множество $M_\delta(\nu)$ совпадает с множеством $M_0(\nu)$). Если множество $\mathcal{Z}$ (а, следовательно, и множество $Q(\nu)$ при любом фиксированном $\nu \in \mathcal{V}$) имеет функциональное задание, которое не является простым, то точно удовлетворить всем ограничениям $u \in Q(\nu)$ обычно не удается и приходится рассматривать δ-*допустимые планы* при фиксированном ν.

Для любых $\nu \in \mathcal{V}$ и положительного числа $\delta \ge 0$ обозначим

$$Q_\delta(\nu) = \{u \in U: f_i(u, \nu) \le \delta \quad (i \in I), \quad |g_j(u, \nu)| \le \delta \quad (j \in J)\}.$$

$Q_\delta(\nu)$ называется множеством δ-*допустимых планов* при фиксированном прогнозе ν. Далее, для любых неотрицательных чисел δ_3 и δ_4 положим

$$M_{\delta_3, \delta_4}(\nu) = \{u \in Q_{\delta_3}(\nu): F(u, \nu) \le m(\nu) + \delta_4\}. \tag{18}$$

Условие $u \in M_{\delta_3, \delta_4}(\nu)$, очевидно, означает, что управление u с точностью до δ_3 удовлетворяет функциональным ограничениям в множестве $Q(\nu)$ и с точностью до δ_4 – условию оптимальности для оптимизационного блока.

При сложном функциональном задании множества $\mathcal{Z}$ для данного $\nu \in \mathcal{V}$ именно $M_{\delta_1, \delta_2}(\nu)$ мы будем называть множеством (δ_3, δ_4)-*приближенных оптимальных решений* для оптимизационного блока; при $\delta_3 = \delta_4 = \delta$ множество $M_{\delta_3, \delta_4}(\nu)$ будем по-прежнему обозначать $M_\delta(\nu)$ (если это не вызывает путаницу с ранее определенным в (6) множеством $M_\delta(\nu)$) и называть множеством δ-*приближенных оптимальных решений.*

Заметим, что при $\delta_3 = \delta_4 = 0$ множество $M_{\delta_3, \delta_4}(\nu)$ совпадает с множеством $M_0(\nu)$ точных оптимальных решений для оптимизационного блока.

4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СПОСОБЫ ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЕННОЙ ПОСТАНОВКИ ПРОГНОЗНО-ПЛАНОВОЙ ЗАДАЧИ

Определение рационального выбора прогноза и управления в терминах обратной оптимизации[5]. Сформулируем определение точного решения. Зафиксируем некоторый вектор $(\delta_3, \delta_4) > 0$, определяющий уровень ожидаемой надежности прогноза ν при выбранном управлении u. Пара $\{\hat{u}, \hat{\nu}\}$ называется *решением прогнозно-оптимизационной задачи,* если справедливы соотношения: $\hat{\nu} \in H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u), \hat{u} \in M_0(\hat{\nu})$.

Для определения приближенного решения прогнозно-оптимизационной задачи зафиксируем числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$, $\delta_4 > 0$. Пара $\{\hat{u}, \hat{\nu}\}$ называется $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$-*приближенным решением прогнозно-плановой задачи,* или $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$-*рациональным выбором прогнозно-плановых показателей* с точки зрения, во-первых, совместных ограничений на прогноз и на оптимальный план, а во-вторых, их возможной совместной реализации, если $\hat{\nu} \in H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u), \hat{u} \in M_{\delta_3, \delta_4}(\hat{\nu})$.

Очевидно, что $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$-приближенное решение прогнозно-плановой задачи эквивалентно $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$-приближенному решению следующей задачи *обратной оптимизации*[6]:

$$\text{найти пару } \{\hat{u}, \hat{\nu}\} \in U \times V, \text{ для которой } \hat{\nu} \in H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u), \hat{u} \in M_{\delta_3, \delta_4}(\hat{\nu}).$$

Ниже будут рассматриваться только приближенные решения.

Определение рационального выбора прогноза и плана в терминах неподвижных точек каждого из двух многозначных отображений:

$$\mathcal{A}(\bullet) = M_{\delta_3, \delta_4}(H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\bullet)): \mathcal{U} \to 2^{\mathcal{U}}, \qquad \mathcal{B}(\bullet) = H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(M_{\delta_3, \delta_4}(\bullet)): \mathcal{V} \to 2^{\mathcal{V}}.$$

Для лучшего понимания того, к какому типу математической задачи сведена рассмотренная постановка прогнозно-плановой проблемы, полезно отметить, что, как легко убедиться из только что введенного понятия “решение прогнозно-плановой задачи”, справедливы следующие два утверждения:

i) $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$-приближенное решение прогнозно-плановой задачи эквивалентно поиску в множестве $\mathcal{U}$ неподвижной точки $\hat{u}$ для многозначного отображения $\mathcal{A}(\bullet)$, действующего из $\mathcal{U}$ в совокупность всех подмножеств множества $\mathcal{U}$ по формуле

$$\mathcal{A}(u) = M_{\delta_3, \delta_4}(H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u));$$

ii) $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$-приближенное решение прогнозно-плановой задачи эквивалентно поиску в множестве $\mathcal{V}$ неподвижной точки $\hat{\nu}$ для многозначного отображения $\mathcal{B}(\bullet)$, действующего из совокупности всех подмножеств множества $\mathcal{V}$ по формуле

$$\mathcal{B}(\nu) = H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(M_{\delta_3, \delta_4}(\nu)).$$

Определение рационального выбора прогноза и управления с помощью функции параметрического минимума в терминах системы неравенств. Очевидно, что система условий

[5] Термин “обратная оптимизация” в рассматриваемой ситуации будет разъяснен ниже. Более подробно задачи обратной оптимизации рассматривались в сборнике, где опубликована статья (Ершов, Левитин, 1992).

[6] Термин “обратная оптимизация” связан со следующим обстоятельством. В отличие от обычной оптимизации, где при известных значениях экзогенных параметров ν отыскивается оптимальный план u, здесь фактически решается обратная задача: найти такой вектор параметров ν, при котором оптимальное множество $M_0(\nu)$ удовлетворяет дополнительному условию: в множестве $M_0(\nu)$ найдется вектор u такой, что пара (u, ν) принадлежит заданному множеству $\mathcal{R}$ в совокупности допустимых пар.

$u \in M_{\delta_3, \delta_4}(\nu)$ эквивалентна соотношениям $u \in Q_{\delta_3}(\nu), F(u, \nu) \le m(\nu) + \delta_4$. Поэтому множество $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$-приближенных решений прогнозно-оптимизационной задачи также задается посредством системы соотношений:

$$u \in Q_{\delta_3}(\nu), F(u, \nu) \le m(\nu) + \delta_2,\ \nu \in H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u). \tag{19}$$

Отметим, что если система соотношений (9) совместна, то при введении в соотношение (9) дополнительной неотрицательной переменной w, очевидно, система соотношений (19) эквивалентна следующей оптимизационной задаче в множестве троек $\{u, v, w\}$:

$$w \to \min,\quad u \in Q_{\delta_3}(\nu),\quad \nu \in H_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u),\quad w \ge 0,\quad F(u, \nu) \le m(\nu) + \delta_4 + w. \tag{20}$$

Полезность перехода от системы соотношений (19) к оптимизационной задаче (20) объясняется двумя причинами. Во-первых, если система $u \in Q_{\delta_3}(\nu),\ \nu \in H_{\delta_1, \delta_3, \delta_3}(u)$ совместна, то и ограничения в задаче (20) совместны. Поэтому рассмотрение оптимизационной задачи (20) имеет смысл даже в том случае, когда система соотношений (19) несовместна. Во-вторых, оптимизационная постановка (20) более удобна для применения численных методов глобальной оптимизации, к которой была редуцирована задача приближенного поиска прогноза и оптимального плана, согласованных друг с другом.

При сделанных ранее предположениях в задании $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$-приближенных решений прогнозно-плановой задачи лишь функция $m(\bullet)$ параметрического минимума обычно не имеет явного вида. Однако для некоторых классов прогнозно-оптимизационных задач (см. разд. 5) эта функция сравнительно легко вычисляется при любом фиксированном $\nu \in V$ и обладает некоторыми важными специальными свойствами. Все эти свойства (если они выполняются) и позволяют свести прогнозно-оптимизационную задачу к *базовой задаче,* для которой легко применим один из самых универсальных численных методов глобальной оптимизации – метод ветвей и границ.

5. ВОПРОСЫ КЛАССИФИКАЦИИ И ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИ ФОРМАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ И ПОИСКЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ПРОГНОЗНО-ПЛАНОВЫХ ЗАДАЧАХ

При математическом моделировании задач прогнозно-планового типа основную методологическую сложность представляет прогнозный блок. Что же касается вычислительной сложности прогнозно-плановой задачи, то она зависит от следующих факторов:

1) типа функциональной зависимости множества прогнозов от плана u;

2) вычислительной сложности оптимизации при поиске приближенного решения в оптимизационном блоке для фиксированного прогноза ν;

3) типа и соответствующей вычислительной сложности решения всей математической задачи обратной оптимизации.

Поэтому классификация прогнозно-плановых задач, связанная с вычислительными методами для получения решения, будет делаться в зависимости от:

1) свойств выпуклости по $\{u, \nu\}$ функций f_i при $i \in I$ и аффинности по $\{u, \nu\}$ функций g_j при $j \in J$, задающих допустимое множество $\mathcal{Z}$;

2) предположений, которым удовлетворяет прогнозный блок;

3) свойств выпуклости по $\{u, \nu\}$ функции F и от свойств задачи (16) оптимизации по u при фиксированном прогнозе ν.

Соответствующие предположения играют центральную роль с точки зрения возможности свести прогнозно-оптимизационную задачу к *базовой оптимизационной задаче* (Левитин, 2012). Наконец, очень важными являются вопросы устойчивости оптимального значения и приближенных оптимальных решений для оптимизационного блока (Левитин, 1992), т.е. малость их изменений при малых изменениях прогнозов вектора экзогенных параметров. Без этих свойств устойчивости модель прогнозно-планового типа вообще теряет требуемое прикладное содержание.

Методологические проблемы формальной постановки задач прогнозно-оптимизационного типа в основном связаны с моделированием прогнозного блока, что может базироваться на весьма разнообразных предположениях и идеях. Так, например, в межотраслевой модели взаимодействия потоков продукции (Ершов, 2008) роль прогнозного блока фактически играет модель согласованных показателей структурированного спроса. Основные трудности при поиске приближенных решений прогнозно-плановой задачи носят вычислительный характер. Для этого, в частности, требуется:

а) умение при фиксированном ν конструктивно задавать все множество (δ_1, δ_2)-приближенных оптимальных решений и легко находить одно из них;

б) при любом фиксированном управлении u иметь сравнительно простое описание множества вероятных прогнозов;

в) на основе специфики задачи, уже отраженной в условиях а–б, иметь практически реализуемый алгоритм для приближенного решения всей прогнозно-оптимизационной задачи.

Оказывается, что для нескольких важных частных классов задач прогнозно-планового типа поиск ее приближенных решений легко можно свести к приближенному решению базовой задачи глобальной оптимизации, для которой, в свою очередь, легко применить метод ветвей и границ с задачами выпуклого программирования в качестве оценочных. Это позволяет свести поиск приближенного решения для прогнозно-оптимизационной задачи к решению конечного числа задач выпуклого программирования.

6. ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО БАНКА СТРАНЫ НА НАЦИОНАЛЬНУЮ ЭКОНОМИКУ

Центральный банк (ЦБ) или некоторая система организаций, выполняющих в основном такие же функции, воздействует на экономику страны как целое, взаимодействуя с другими экономическими агентами. В ряде европейских стран, в США и Канаде были разработаны макроэкономические модели таких взаимодействий. Например, в работе (Harrison et al., 2005) дано детальное описание *квартальной модели Банка Англии* (модели BEQM (Bank of England Quarterly Model)). Экономическими агентами в ней являются домашние хозяйства, фирмы, правительство, монетарные власти и внешняя экономика. Им предписывается оптимизирующее поведение, формализуемое в виде “*базовой теоретической модели*” (БТ-модели), называемой “core model”, разработанной в рамках идей *моделей общего экономического равновесия* (DSGE-моделей).

Эта модель включает 130 эндогенных переменных, 35 экзогенных переменных и 104 параметра. Экспериментальные расчеты показали, что получаемое решение (траектории эндогенных переменных) недостаточно близко находится к статистически регистрируемым значениям этих переменных. Это решение и часть экзогенных переменных и параметров БТ-модели используются как экзогенные переменные и параметры в *прикладной модели* (П-модели), имеющей 165 эндогенных переменных, 49 экзогенных переменных и 32 параметра. Часть ее эндогенных переменных совпадает с некоторыми эндогенными переменными БТ-модели. П-модель представляет линейную по переменным и параметрам модель, описываемую системой уравнений, разрешенных относительно ее эндогенных переменных для очередного квартала, т.е. *моделью векторной авторегрессии* (VAR-*моделью*). Ее параметры оцениваются эконометрическими методами по статистическим данным и решениям для БТ-модели.

С помощью П-модели фактически корректируются решение БТ-модели и значения части ее параметров. Предполагается, что таким образом компенсируется недостаточный учет в данных и соотношениях БТ-модели особенностей моделируемой экономики, не находящих отражение в теоретических предположениях и в динамике ее эндогенных показателей.

Анализ модели BEQM позволяет рассматривать ее как своеобразно реализующую идеи прогнозно-планового подхода. БТ-модель в ней играет роль прогнозного блока, решение которого используется в плановом блоке, поскольку прогноз включает существенную часть экзогенных переменных плана. С позиций моделей прогнозно-планового типа это выражается в “совпадении” (но не в равенстве) значений части переменных ν и u. Таким образом, в модели рассматривается подмножество переменных $w = \{w_k\}$ таких, что для каждого w_k в модели определена пара переменных $\{u_k, \nu_k\}$, интерпретируемых как прогнозное и плановое значение переменной w_k.

Подобное "раздвоение", или двойная интерпретация, переменных используется в моделях, имеющих прикладную направленность и сталкивающихся с трудностями согласования преимущественно теоретических и экспериментально-прагматических подходов к моделированию происходящих в экономике процессов. По-видимому, впервые прием "двойного описания" части переменных был предложен в модели межотраслевых взаимодействий (Яременко, Ершов, Смышляев, 1975, с. 424–425, 437–438).

Отметим, что идея прогнозно-планового моделирования в модели BEQM реализуется лишь частично, поскольку решение П-модели не используется для коррекции БТ-модели и ее экзогенных показателей. Но целесообразность и даже необходимость учета воздействия решений экономического агента (влияющего на поведение других экономических агентов) на экзогенные для него показатели на примере этой модели можно считать очевидным.

В заключение выскажем несколько итоговых соображений. Математическая постановка и решение задач, рассматриваемых в предлагаемой работе, существенно расширяет математический аппарат для исследования многих актуальных социально-экономических проблем. При этом порождаемые прогнозно-плановой моделью отображения $M_0(\bullet)$, $H_\zeta(\bullet)$ и соответствующие им ограничения $\hat{u} \in M_0(\hat{\nu})$, $\hat{\nu} \in H_\zeta(\hat{u})$ дают важную информацию, которую необходимо использовать при учете целевых и ресурсных требований. Необходимо подчеркнуть, что расширение идейных подходов и инструментальных методов при постановке и решении прогнозно-плановых задач требует детализации различных условий и гипотез, на которых должны базироваться прогнозы, поскольку после реализации оптимизационного блока эти прогнозы должны быть с ним согласованы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аркин В.И. (1979). Связь между методами динамического программирования и стохастическим принципом максимума (Оценка оптимального плана). В сб.: "Теоретико-вероятностные методы в задачах управления экономическими процессами". М.: ЦЭМИ АН СССР.

Аркин В.И., Евстигнеев И.В. (1979). Вероятностные модели управления и экономической динамики. М.: Наука.

Бар-Шалом Я., Цы Э. (1980). Концепции и методы управления. В коллективной монографии: "*Фильтрация и стохастическое управление в стохастических системах*". М: Мир.

Беллман Р. (1964). Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука.

Беллман Р., Дрейфус С. (1965). Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука.

Беллман Р., Калаба Р. (1969). Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука.

Биргер Е.С., Уринсон Я.М., Чарный В.И. (1978). Опыт построения динамической межотраслевой модели // *Экономика и мат. методы.* Т. XIV. Вып. 3.

Вальтер Я. (1976). Стохастические модели в экономике. М.: Статистика.

Евстигнеев И.В., Катышев П.К. (1979). Об одной вероятностной модели экономической динамики и равновесия. В сб.: "*Теоретико-вероятностные методы в задачах управления экономическими процессами*". М.: ЦЭМИ АН СССР.

Ершов Э.Б. (2008). Развитие и реализация идей моделей межотраслевого взаимодействия для российской экономики // *Экономический журнал Высшей школы экономики.* Т. 12. № 1.

Ершов Э.Б., Левитин Е.С. (1989). Проблема замыкания моделей оптимального планирования по экзогенным параметрам. В сб.: "*Экономико-математические модели и методы*". Воронеж: Изд-во Воронежского университета.

Ершов Э.Б., Левитин Е.С. (1992). О задаче совместного определения прогноза и плана в сложных системах. В сб.: "О*братные задачи математического программирования*". М.: Вычислительный Центр РАН.

Кольцов А.В. (1980). К вопросу о согласовании межотраслевых и эконометрических моделей планирования и прогнозирования. В сб.: “*Функциональные блоки системы моделей перспективного планирования народного хозяйства*”. М.: ЦЭМИ АН СССР.

Левитин Е.С. (1992). Теория возмущений в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука.

Левитин Е.С. (1995). Оптимизационные задачи с экстремальными ограничениями // *Автоматика и телемеханика.* № 7, 12.

Левитин Е.С. (2011). О приближенной глобальной минимизации с заданной точностью для задач оптимизации с DC-функциями. Сб. трудов IV Международной конференции “*Системный анализ и информационные технологии*”. Т. 1. Абзаково. 17–23 августа 2011 г. Челябинск: Изд-во Челябинского государственного университета.

Левитин Е.С. (2012). О базовой задаче и важнейших редукциях к ней при приближенном поиске глобального минимума методом ветвей и границ. IX Всероссийская школа-семинар “*Прикладные проблемы управления макросистемами*” (материалы докладов). ИСА РАН и Институт информатики и математического моделирования технологических процессов Кольского научного центра. Апатиты: КНЦ.

Морз Ф.М., Кимбелл Д.Е. (1956). Методы исследования операций. М.: Советское радио.

Петраков Н.Я., Ротарь В.И. (1978). К вопросу об экономико-математической модели управления, учитывающей фактор неопределенности // *Экономика и мат. методы.* Т. XIV. Вып. 3.

Раяцкас Р.Л., Суткайтис В.П. (1978). К проблеме моделирования взаимосвязей общества и природы // *Экономика и мат. методы.* Т. XIV. Вып. 3.

Соренсон Г. (1980). Обзор методов фильтрации и стохастического управления в динамических системах. В коллективной монографии “*Фильтрация и стохастическое управление в стохастических системах*”. М.: Мир.

Фельдбаум А.А. (1963). Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз.

Яременко Ю.В., Ершов Э.Б., Смышляев А.С. (1975). Модель межотраслевых взаимодействий // *Экономика и мат. методы.* Т. XI. Вып. 1.

Greene W.H. (2008). Econometric Analysis. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

Harrison R., Nikolov K., Quiun M. et al. (2005). The Bank of England Quarterly Model. [Электронный ресурс] Bank of England 2005 (ISBN 1 857301536). Режим доступа: http://www.bankofEngland.co.un/publication/other/beqm/beqmfull.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: декабрь 2012 г.).

Laning J.H., Battin R.H. (1956). Random Processes in Automatic Control. N.Y.: McGrow-Hill. (Перевод: **ЛэнингДж., Бэттин Р.** (1958). Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.: ИЛ.)

Newton G.C., Gould L.A., Raiser J.F. (1957). Analytical Design of Linear Feedback Controls. N.Y.: Wiley (Перевод: **Ньютон Д., Гулд Л., Кайзер Д.** (1961). Теория линейных следящих систем. Аналитические методы расчета. М.: Физматгиз.)

Поступила в редакцию
31.10.2012 г.

On Forecasting and Planning Models of Social and Economic Problems

E.B. Ershov, E.S. Levitin

In order to study social and economic problems a mathematical model of joint search for exogenous parameters forecast and optimal plan leading to global optimisation problem is considered. This model, leading to searching the fixed-point for superposition of two many-valued mappings, is equivalent to complex global optimization problem.

Keywords: economic and mathematical modelling, forecast, optimal plan, many-valued mapping (M.-v. m.), fixed-point of M.-v. m., global optimization problem.